1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA:

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2011
Final – 13/12/2011

---

1. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función inyectiva. Se define la relación $\Re$ siguiente en $\mathbb{N}$:
$$m \,\Re\, n \iff f(m) \mid f(n).$$
   - Probar que $\Re$ es una relación de orden.
   - Para la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $f(n) = 12n + 20$, caracterizar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $1 \,\Re\, n$.

---

2. Sea p un número primo positivo, $p \neq 3$, y sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que
$$(a + 4b)^p \equiv 4a + b \pmod{p} \iff a \equiv b \pmod{p}.$$
¿Por qué es necesario pedir $p \neq 3$?

---

3. Hallar un $n \in \mathbb{N}$, que sea el producto de dos números primos distintos y tal que la ecuación de congruencia
$$X^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$
tenga exactamente 4 soluciones distintas módulo n. Para el valor hallado, calcular las cuatro soluciones.

---

4. Sea la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polinomios definida por:
$$f_1 = X^3 + X^2 - X - 1 \quad , \quad f_{n+1} = f_n + (2X^4 + 2X^3)^{n+1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, -1 es raíz doble (¡exactamente doble!) de f_n.

5.
   - Sea ω una raíz octava primitiva de la unidad. Probar que $\omega^4 = -1$.
   - Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{C}$ se tiene que las raíces octavas primitivas de la unidad son raíces del polinomio
$$f = X^6 + 2X^5 + 4X^4 + X^2 + 2X + a,$$
y para cada valor de a hallado, factorizar el polinomio f en $\mathbb{C}[X]$ y en $\mathbb{R}[X]$.

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen