

Práctica 2: Funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$

---

1. Dar el dominio de definición para cada una de las siguientes funciones y graficarlo:

a)  $f(x, y) = \ln(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)$       b)  $f(x, y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$

c)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \sqrt{y - x^2}$       d)  $f(x, y) = \frac{1}{x}$

e)  $f(x, y) = \frac{\ln(1 - y + x^2)}{\sin x}$       f)  $f(x, y) = \int_x^y \frac{1}{1 + t^2} dt$

g)  $f(x, y) = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}}$       h)  $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 y)}{\ln(1 - x^2)}$

2. Para distintos valores de  $c$  graficar aproximadamente el conjunto  $\{(x, y) : f(x, y) = c\}$ . En otras palabras, determinar las distintas curvas de nivel.

a)  $f(x, y) = x + y$       b)  $f(x, y) = x^2 + y^2$

c)  $f(x, y) = \sqrt{xy}$       d)  $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$

e)  $f(x, y) = x^2 - y^2$

3. Estudiar las superficies de  $\mathbb{R}^3$  representadas por las siguientes ecuaciones y determinar cuáles de estas superficies son la gráfica de una función  $z = f(x, y)$ .

a)  $z = 2x^2 + y^2$       b)  $z^2 = 1 - x^2 - \frac{y^2}{2}$       c)  $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$

d)  $3x + 2y - z = 0$       e)  $z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} - 2$       f)  $6x^2 + y^2 - z^2 = 1$

g)  $x^2 + y^2 = 4z^2$

4. Para distintos valores de  $u$  graficar aproximadamente el conjunto  $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = u\}$ . En otras palabras, determinar las distintas superficies de nivel.

a)  $f(x, y, z) = x + y + z$       b)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

c)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$       d)  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2$

## Límite y continuidad

5. ¿A qué distancia de 16 basta tomar  $x$  para asegurar que:

$$a) \frac{1}{\sqrt{x}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)? \quad b) \frac{1}{\sqrt{x}} \in \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10}, \frac{1}{4} + \frac{1}{10}\right)? \quad c) \frac{1}{\sqrt{x}} \in \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1000}, \frac{1}{4} + \frac{1}{1000}\right)?$$

6. Se define  $[x]$  la parte entera de  $x$  como  $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ . Analizar la existencia de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  para cada  $a \in \mathbb{R}$  siendo:

$$a) f(x) = x - [x]. \quad b) f(x) = \frac{x}{[x]}. \quad c) f(x) = |x| + [x].$$

7. Calcular, si existen, los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \operatorname{cos} x} & b) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 9} & c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} x \\ d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x}}{\ln(|x|)} & e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \\ g) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/\tan x} & h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} & i) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{cos} x)^{1/x} \end{array}$$

8. (a) Usando sólo la definición de límite demostrar que:

$$i. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} x + y = 1;$$

$$ii. \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,8)} xy = -8.$$

(b) Si  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon = 1/100$  ó  $\varepsilon = \alpha^2$ , encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$\|(x, y) - (-1, 8)\| < \delta \implies |xy + 8| < \varepsilon.$$

9. Probar por definición que si  $(x, y) \rightarrow (2, 3)$ , entonces  $y \operatorname{sen}(xy - 6) \rightarrow 0$ .

10. Probar que:

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (7,2)} x^2 + y^2 - xy = 39;$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \operatorname{sen}(x \operatorname{cos} y) = 0;$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} x e^{xy} = 0;$$

$$d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{y^2 + \operatorname{cos}(\pi - x)}{y} = \frac{8}{3}.$$

$$e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} y e^x = 1;$$

$$f) \lim_{(x,y) \rightarrow (c,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{x^2 - y^2} = 0 \text{ si } c \neq 0;$$

11. (a) Sea  $f : B_r(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  no se anula sobre  $B_r(a, b) \setminus \{(a, b)\}$  y  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$ . Probar que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\text{sen}(f(x, y))}{f(x, y)} = 1.$$

- (b) Sea  $f : B_r(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = +\infty$ . Probar que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\ln(f(x, y))}{f(x, y)} = 0.$$

12. Calcular:

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2};$

(b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\text{sen}(xy)}{x};$

(c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2).$

13. Analizar la existencia de los límites restringido a los ejes coordenados y del límite doble de las siguientes funciones en el origen:

a)  $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y};$

b)  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2};$

c)  $f(x, y) = \frac{\text{sen } x}{y};$

d)  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$

e)  $f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{xy + y - x};$

f)  $f(x, y) = |x|^y;$

g)  $f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2};$

h)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{x^2 y^2};$

i)  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - x^2 + 1}{x^2 - y^2};$

j)  $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y};$

k)  $f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|};$

l)  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1};$

m)  $f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2)$

n)  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

o)  $f(x, y) = x \text{sen} \frac{\pi}{y} + y \text{sen} \frac{\pi}{x};$

p)  $f(x, y) = \text{sen} \frac{x}{y};$

14. Demostrar que las siguientes funciones tienden a cero si  $(x, y)$  se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero que para ninguna de ellas existe el límite cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$$a) f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}; \quad b) f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 - x};$$

$$c) f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}; \quad d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y)y}{x^4}, & \text{si } 0 < y < x^2; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

15. Para cada una de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = \frac{1}{2} \sin^2(x);$$

$$(b) f(x) = x^2 - [x^2];$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ -x, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x/2), & \text{si } |x| \leq 1; \\ |x - 1|, & \text{si } |x| > 1; \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } x > 0; \\ x^2 + 1, & \text{si } x \leq 0; \end{cases}$$

- Calcular su dominio natural.
- Estudiar la continuidad en cada punto de su dominio. En los puntos de discontinuidad, indicar de qué tipo se trata.
- En los puntos que no pertenezcan al dominio, definirla (si es posible) de modo que resulte continua.

16. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4(x+1)}{|x+1|^3 + 2|y|^3} & (x, y) \neq (-1, 0) \\ 1 & (x, y) = (-1, 0) \end{cases}$$

- (a) Probar que  $f$  no es continua en  $(-1, 0)$ .
- (b) Redefinirla en  $(x, y) = (-1, 0)$ , si es posible, de manera tal que resulte continua en  $\mathbb{R}^2$ .

17. Consideremos la función

$$f(x, y) = xy \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{1}{y} \right).$$

- (a) Calcular su dominio.  
 (b) Determinar si es posible extenderla a  $\mathbb{R}^2$  de modo que resulte continua.

18. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad \text{en } (1, 0) \text{ y } (0, 0);$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} |y|^x(1+x)^y, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ y } x > -1; \\ 1, & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad \text{en } (1, 0) \text{ y } (0, 2);$$

$$(c) f(x, y) = \text{sen}(x \cos y) \quad \text{en } (1, 1) \text{ y } (0, 2);$$

$$(d) f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0; \\ 1, & \text{en otro caso;} \end{cases} \quad \text{en } (0, 0) \text{ y } (1, 1);$$

$$(e) f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } xy \neq 0; \\ 0, & \text{si } xy = 0; \end{cases} \quad \text{en } (1, 0) \text{ y } (-1, 2).$$

19. Probar que la siguiente función no tiene límite cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

$$f(x, y) = \frac{\text{sen}(xy)}{|x - y|}$$

*Sugerencia:* En primer lugar calcular el dominio de  $f$  y mostrar que cero es un candidato a límite. Luego elegir uno de los siguientes caminos para probar la no existencia del límite:

- PLAN A: Encontrar alguna trayectoria que pase por el origen sobre la cual  $f$  no tienda a cero.
- PLAN B: Considerar la sucesión de puntos  $p_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})$ , probar que esta sucesión tiende a cero y calcular el  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n)$ .
- PLAN C: Probar si el límite es cero entonces debe existir un entorno del origen en donde  $f$  esté acotada. Mostrar que esto último no puede ocurrir.

20. Analizar la existencia de límite en el origen para

$$f(x, y) = \frac{e^{(x^2+y^3)} - 1}{xy - x + y^2}$$

21. Estudiar la continuidad de  $f$  en el punto  $(1, 0)$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}y}{(x-1)^2+y^2|x|} & \text{si } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

*Sugerencia:* Probar y usar que si  $\|(x, y) - (1, 0)\| < \frac{1}{2}$  entonces  $(x - 1)^2 + y^2|x| \geq \frac{1}{2}[(x - 1)^2 + y^2]$

22. Estudiar la continuidad de  $f$  en el origen de coordenadas.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2 - \tan(x^2y)}{\frac{1}{2}x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

23. Probar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua respecto de cada una de las variables por separado pero no lo es como función de ambas.

24. Demostrar que si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $x = a$  y la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  está dada por  $f(x, y) = g(x)$ , entonces  $f$  es continua en todo punto de la recta  $(a, y)$ . Usar esto para probar que las siguientes funciones son continuas en todo  $\mathbb{R}^2$ :

$$(a) \quad f(x, y) = \text{sen}(x). \quad (b) \quad f(x, y) = \text{sen}(x^2) + e^y.$$

25. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

$$(a) \quad f(x, y) = (x^2, e^x) \quad (b) \quad f(x, y) = \left( \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, \frac{e^{x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2} \right)$$

26. (a) Hallar todas las funciones continuas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(x)^2 - e^x = 0$ .  
 (b) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\text{Im}(f) = [a, b] \cup [c, d]$  con  $a < b < c < d$ . ¿Es  $f$  continua?  
 (c) Demostrar que la ecuación  $x^{2^x} = 1$  tiene al menos una raíz positiva y menor o igual que 1.  
 (d) Probar que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $f(x) \in \mathbb{Q}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , entonces debe ser constante.  
 (e) Probar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.
27. (a) Sea  $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{1}{1 - \|x\|}$ . Probar que  $f$  es continua y no es acotada.  
 (b) Sea  $g : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = \|x\|$ . Probar que  $g$  es continua y acotada pero no alcanza su máximo en  $B_1(0)$ .

28. Sea  $f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2y)}{\ln(1 - x^2)}$

- (a) Encontrar el dominio  $D$  de  $f$  y graficarlo.  
 (b) Dado  $q = (q_1, q_2) \in \text{Fr}(D)$ , ¿existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (q_1, q_2)} f(x, y)$ ?