Análisis I: Extremos Absolutos

Patricia Jancsa- Noviembre de 2011

Ejercicio: calcular la distancia mínima entre la parábola P de ecuación $y = x^2$ y la recta R de ecuación $y = x - 2$.

Solución: Escribamos a P y a R en la forma siguiente:

$$P = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\},\ R = \{(t, t-2) : t \in \mathbb{R}\}$$

Se busca el mínimo de la función $d(x,t)$ =distancia al cuadrado entre el punto de P correspondiente al parámetro x y el punto de la recta correspondiente a t.

Más precisamente, se busca el mínimo de $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x,t) = ||(x, x^2) - (t, t-2)||^2 = (x-t)^2 + (x^2 - t + 2)^2$$

Dado que el dominio es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y d es diferenciable, los únicos candidatos a extremos son ceros de ∇d. Calculemos sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial d}{\partial x} = 2(x-t) + 2(x^2 - t + 2)2x$$
$$\frac{\partial d}{\partial t} = -2(x-t) - 2(x^2 - t + 2)$$

Las ecuaciones $\frac{\partial d}{\partial x} = 0 = \frac{\partial d}{\partial t}$ implican que la suma de las dos es cero:

$$0 = \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial d}{\partial t} = (x^2 - t + 2)(2x - 1) \quad (*)$$

entonces al menos uno de los dos factores debe ser cero. Si $x^2 - t + 2 = 0$ entonces, de $\frac{\partial d}{\partial x} = 0$ se obtiene $x = t$, pero esto no puede pasar porque $t = x = \pm\sqrt{t-2}$ implica $t^2 - t + 2 = 0$, que no tiene raíces reales pues $\frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \notin \mathbb{R}$.

Por lo tanto, el segundo factor de $(*)$ es cero, es decir que $x = \frac{1}{2}$, y entonces, $t = \frac{11}{8}$. Obtenemos como único punto crítico $p = (\frac{1}{2}, \frac{11}{8})$, y

$$d(p) = 2\left(\frac{7}{8}\right)^2 < 2$$

d tiene un mínimo relativo en p, porque su Hessiano es definido positivo:

$$Hess(d)|_p = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

En efecto, $a_{11} > 0$ y $\Delta = \frac{15}{2} - 4 > 0$.

Queremos probar que, más aún, d alcanza el mínimo absoluto en p. Para probar esto, consideraremos la restricción de d a un compacto convenientemente elegido. Sea

$$K = \{(x,t) : -M \leq x \leq M,\ -M \leq t \leq M, \}$$

con $M > 8$; entonces K es compacto y en consecuencia, d alcanza los extremos absolutos en K. Notar que K es un cuadrado (relleno) de semilado M.

Además, se verifica lo siguiente:

- $d|_K : K \to \mathbb{R}$ no alcanza el mínimo absoluto en ∂K, por lo tanto, $d|_K : K \to \mathbb{R}$ alcanza el mínimo absoluto en p, que pertenece al interior de K.
- $d|_{\mathbb{R}^2 \setminus K} > d(p)$, es decir, fuera de K, la función d toma valores más grandes que $d(p)$

Por lo tanto, una vez probado los dos items anteriores, habremos demostrado que

$$\boxed{d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ alcanza el mínimo absoluto en } p}.$$

Probemos los dos items anteriores:

El borde del compacto consiste de dos segmentos horizontales y dos segmentos verticales, es decir, $\partial K = B_1 \cup B_2$ con

$$B_1 = \{(x, \pm M) : x \in [-M, M]\},\ B_2 = \{(\pm M, t) : t \in [-M, M]\}$$

Notemos que

$$d(x,t) = (x-t)^2 + (x^2 - t + 2)^2 \geq (|x| - |t|)^2 + (x^2 - |t| + 2)^2$$

- Para B_1, dado que $M > 8$,
  - si $|x| \leq \frac{M}{2}$, entonces
  $$d(x, \pm t) \geq (|x| - M)^2 + 0 \geq \frac{M^2}{4} > M$$
  - Si $|x| \geq \frac{M}{2}$ entonces
  $$d(x, \pm t) \geq 0 + (x^2 - M + 2)^2 \geq \left(\frac{M^2}{4} - M + 2\right)^2 > \left(\frac{8M}{4} - M + 2\right)^2 = (M+2)^2 > M^2 > M$$
- Para B_2,
  $$d(\pm M, t) \geq 0 + (M^2 - t + 2)^2 \geq (M^2 - M + 2)^2 = (M(M-1) + 2)^2 > (M+2)^2 > M^2 > M$$

Esto prueba que el mínimo absoluto de $d|_K$ no ocurre en el borde, por lo tanto ocurre en el interior y debe ser un punto crítico. Como el único punto crítico es p, entonces $d|_K$ tiene el mínimo absoluto en p.

Este razonamiento vale cualquiera sea $M > 8$; por ejemplo sea $M = 9$ y fijemos el compacto K_0 como antes correspondiente a $M = 9$, es decir,

$$K_0 = \{(x,t) : -9 \leq x \leq 9,\ -9 \leq x \leq 9, \}$$

Probemos ahora que $d(x,t) > d(p)$ para todo (x,t) *fuera* de K_0. En efecto, si $(x_0, t_0) \notin K_0$ entonces o bien $|x_0| \geq 9$ o bien $|t_0| \geq 9$. Sea $\widetilde{M} = max\{|x_0|, |t_0|\}$ y

$$\widetilde{K} = \{(x,t) : -\widetilde{M} \leq x \leq \widetilde{M},\ -\widetilde{M} \leq x \leq \widetilde{M}, \}$$

Es claro que $\widetilde{M} > 9 > 8$ y que $(x_0, t_0) \in \partial\widetilde{K}$, por lo tanto, aplicando el razonamiento anterior a $\widetilde{K}$ obtenemos que $d(x_0, t_0) > \widetilde{M} > 9 > d(p)$, como queríamos probar.