Álgebra Lineal - Práctica N°9 - Segundo cuatrimestre de 2011
Geometría afín y variedades lineales

Ejercicio 1.

i) Sea V un espacio vectorial y sea $p \in V$ un vector fijo. Se define V_p como el espacio vectorial sobre el mismo conjunto V con las operaciones $+_p$ y $\cdot_p$ dadas por:

$$\begin{aligned} v +_p w &= (v-p)+(w-p)+p \\ \lambda \cdot_p v &= \lambda \cdot (v-p)+p \end{aligned}$$

Probar que V_p es un espacio vectorial, con $0_{V_p} = p$. Observar que $-_p v = -v+2p$.

ii) Probar que, si $q \in V$ es otro vector, se tiene:

$$v +_q w = (v -_p q) +_p (w -_p q) +_p q$$
$$\lambda_q \cdot v = \lambda_p \cdot (v -_p q) +_p q$$

Ejercicio 2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. El conjunto $S = \{p; v_1, \dots, v_n\}$ se denomina *sistema de coordenadas afines* en V si $p \in V$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V_p.
Mostrar que son equivalentes:

a) $S = \{p; v_1, \dots, v_n\}$ es un sistema de coordenadas afines en V.

b) $\{v_1 - p, \dots, v_n - p\}$ es base de V.

Ejercicio 3. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $S = \{p; v_1, \dots, v_n\}$ un sistema de coordenadas afines en V. Dado $v \in V$, notaremos con $[v]_S$ al vector de coordenadas de v respecto de la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V_p; i.e., $[v]_S = (a_1, \dots, a_n)$ si $v = \sum_{i=1}^{n}{}_p\, a_i \cdot_p v_i$

NOTA: $[v]_S$ se denomina *vector de coordenadas afines de v respecto de S.*

a) Hallar $[v]_S$ en los casos siguientes:

- $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(2,1,0); (0,1,0), (2,0,1), (0,0,-3)\}$, $v = (0,0,0)$
- $V = \mathbb{R}_2[X]$, $S = \{X^2; X+1, X^2+3X, X^2+2\}$, $v = 2X$

b) Sea $S = \{(0,-2,1); (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Si $[v]_S = (-2,0,4)$, calcular v.

Ejercicio 4. Sea V un espacio vectorial y $v_1, \dots, v_k \in V$. Se dice que $v \in V$ es *combinación afín* de $v_1, \dots, v_k$ si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ y $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$.
Probar que para todo $p \in V$

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad v = \sum_{i=1}^{n}{}_p\, \lambda_i \cdot_p v_i$$

Ejercicio 5. Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$. Se dice que $\{v_1, \dots, v_m\}$ es *afínmente independiente* si existe $j \leq m$ tal que $\{v_1 - v_j, \dots, \widehat{v_j - v_j}, \dots, v_m - v_j\}$ [1] es linealmente independiente.
Verificar que son equivalentes:

[1] $\widehat{v_k}$ significa que se excluye el elemento v_k

a) $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es afínmente independiente

b) $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0$ con $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$ implica que $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$

c) $\{v_1 - v_j, \ldots, \widehat{v_j - v_j}, \ldots, v_m - v_j\}$ es linealmente independiente para todo $j \leq m$

d) $\{v_1, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_m\}$ es linealmente independiente en V_{v_j} para todo $j \leq m$.

Ejercicio 6. Dados dos vectores v, w de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V se define el *segmento de extremos v y w* como $vw = \{(1-t)v + tw : t \in [0,1]\}$. Un subconjunto $C \subset V$ se dice *convexo* si para todo $v \neq w \in C$ se tiene que $vw \subset C$. Probar que

a) Los conjuntos convexos son cerrados por combinaciones convexas, es decir: dados $v_1, \ldots, v_r \in C$ y escalares $\lambda_i \geq 0$ tales que $\sum \lambda_i = 1$, se tiene que $\sum \lambda_i v_i \in C$.

b) La intersección arbitraria de convexos es un conjunto convexo.

c) Si A y B son convexos entonces $A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$ es convexo. De la misma forma $A - B$ y λA (para $\lambda \in \mathbb{R}$) son también convexos.

d) Si $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces la clausura *cl* C y el interior *int* C son también convexos.

e) Caracterizar todos los subconjuntos $A \subset \mathbb{R}$ tales que A y su complemento A^c son convexos. Idem para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

f) Se define la *cápsula convexa* de un conjunto $A \subset V$ como el menor convexo de V que contiene a A. Probar que la cápsula convexa de A es la intersección de todos los convexos que contienen a A y que se puede caracterizar también como el conjunto de combinaciones convexas de elementos de A.

Ejercicio 7. Sea M un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V. Probar que son equivalentes:

i) Existe $p \in V$ tal que M es subespacio de V_p.

ii) M es subespacio de V_p para todo $p \in M$.

iii) Existen $p \in V$ y $\mathbb{S}$ subespacio de V tales que $M = p + \mathbb{S}$

Ejercicio 8. Sea V un K-espacio vectorial y sean p, $q \in V$; $p \neq q$. Si L es la recta que pasa por p y q, probar que:

i) Si $M \subseteq V$ es una variedad lineal tal que $p, q \in M$ entonces $L \subseteq M$.

ii) $L = \{\lambda.p + \mu.q \,/\, \lambda\,,\, \mu\, \in K\,;\, \lambda + \mu = 1\}$

Ejercicio 9. Hallar un conjunto de generadores afínmente independientes de las variedades lineales

a) $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 = 3\ ,\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5\}$

b) $M = \{x \in \mathbb{R}^5 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -2\}$

c) M generada por $A = (-1, 0, 1)$, $B = (2, 1, 1)$, $C = (1, 0, 0)$ y $D = (-2, -3, -3)$.

Ejercicio 10. Probar que cada uno de los siguientes conjuntos son variedades lineales y calcular su dimensión:

i) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_3 = 1 \text{ y } x_2 + x_3 = -2\}$

ii) $M_2 = \{(1, 2, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

iii) $M_3 = \{P \in \mathbb{Q}_3[X] \,/\, P'(2) = 1\}$

iv) $M_4 = \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,/\, tr(A) = 5\}$

Ejercicio 11.

i) Sea $L \subseteq \mathbb{R}^3$ la recta que pasa por los puntos $(2, -1, 0)$ y $(1, 3, -1)$. Hallar una variedad lineal M de dimensión 2 que contenga a L. ¿Es M única?

ii) Sea $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$ y sea $L = < (0, 1, 1) > + (1, 1, 0)$. Hallar una variedad lineal $M \subseteq \mathbb{R}^3$ de dimensión 2 tal que $M \cap \Pi = L$.

Ejercicio 12. Determinar la dimensión de la variedad lineal

$$M = \Big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + 3.x_3 = 0,\ 2.x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ -x_1 + x_2 + a.x_3 = 0\Big\}$$

de acuerdo a los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 13. Hallar ecuaciones implícitas para las siguientes variedades lineales:

i) $M = < (1, 2, 1), (2, 0, 1) > + (1, 1, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$.

ii) $M \subseteq \mathbb{R}^4$ la mínima variedad lineal que contiene a $(1, 1, 2, 0)$, $(2, 1, 1, 0)$ y $(-1, 0, 4, 1)$.

Ejercicio 14. Sea $L = < (2, 1, 1) > + (0, -1, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$.

i) Hallar un plano Π tal que $0 \in \Pi$ y $L \subseteq \Pi$.

ii) ¿Existirá un plano Π' tal que $L \subseteq \Pi'$, $0 \in \Pi'$ y $(0, 0, 1) \in \Pi'$ simultáneamente?

Ejercicio 15.

i) Encontrar en $\mathbb{R}^3$ dos rectas alabeadas que pasen por $(1, 2, 1)$ y $(2, 1, 1)$ respectivamente.

ii) Encontrar en $\mathbb{R}^4$ dos planos alabeados que pasen por $(1, 1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1, 1)$ respectivamente.

iii) ¿Hay planos alabeados en $\mathbb{R}^3$? Más generalmente, si V es un K-espacio vectorial de dimensión n y M_1 y M_2 son variedades lineales alabeadas en V, ¿qué se puede decir de sus dimensiones?

Ejercicio 16.

i) Sea $L_1 = < (2, 1, 0) > + (0, 0, 1)$. Hallar una recta $L_2 \parallel L_1$ que pase por el punto $(-1, 3, 0)$.

ii) Si L_1 y L_2 son las rectas de i), hallar un plano $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $L_1 \subseteq \Pi$ y $L_2 \subseteq \Pi$ simultáneamente. ¿Es Π único?

iii) Con las notaciones anteriores, hallar un plano $\Pi' \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $\Pi \cap \Pi' = L_1$.

Ejercicio 17. En cada uno de los siguientes casos, decidir si las variedades lineales M_1 y M_2 se cortan, si M_i es paralela a M_j, o si son alabeadas. En cada caso, hallar $M_1 \cap M_2$, $M_1 \vee M_2$ y calcular todas las dimensiones:

i) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$, $M_2 = <(1,0,1)> + (0,0,-3)$

ii) $M_1 = <(1,2,1,0),(1,0,0,1)> + (1,2,2,-1)$, $M_2 = <(1,0,1,1),(2,2,1,0)> + (-1,4,2,-3)$

iii) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 - 1 = x_3 + x_4 = 0\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 = x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0\}$

Ejercicio 18. Sean
$M_1 = <(1,1,1)> + (0,2,0)$ y $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 = x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$.

i) Hallar planos Π_1 y Π_2 de $\mathbb{R}^3$ tales que $M_1 \subseteq \Pi_1$, $M_2 \subseteq \Pi_2$ y $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ simultáneamente.

ii) Hallar $M_1 \cap M_2$ y $M_1 \vee M_2$ y calcular sus dimensiones.

Ejercicio 19. Sean $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ las rectas definidas por

$$\begin{aligned} L_1 &= \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 3.x_3 = 0\,,\ x_2 - x_3 = -2\big\} \quad \text{y} \\ L_2 &= \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 6.x_3 = 1\,,\ x_2 + 2.x_3 = 0\big\}\,. \end{aligned}$$

Hallar una recta $L \subseteq \mathbb{R}^3$ que pase por el punto $(1,0,2)$ y corte a L_1 y a L_2.

Ejercicio 20. Sean $A = (1,1,2)$ y $B = (2,0,2)$. Sea $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 = 2\}$. Hallar $C \in \Pi$ tal que A, B y C formen un triángulo equilátero. ¿La solución es única?

Ejercicio 21. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ las rectas dadas por las ecuaciones $L_1 : x_2 = 0$, $L_2 : x_2 = \alpha$ y $L_3 : x_2 = \beta$, con α y β dos números no nulos y distintos entre sí. Sean L y L' dos rectas transversales a L_1, L_2 y L_3. Probar que

$$\frac{d(L_1 \cap L, L_2 \cap L)}{d(L_2 \cap L, L_3 \cap L)} = \frac{d(L_1 \cap L', L_2 \cap L')}{d(L_2 \cap L', L_3 \cap L')}.$$

Este enunciado se conoce con el nombre de *Teorema de Thales.*

Ejercicio 22. Dado el triángulo PQR, se llama *mediana correspondiente al vértice* P a la recta que pasa por dicho vértice y por el punto medio del lado $\overline{QR}$.
Se considera en $\mathbb{R}^2$ el triángulo cuyos vértices son $P = (0,0)$, $Q = (c,0)$ y $R = (a,b)$.

i) Probar que sus tres medianas se cortan en un punto M.

ii) Probar que si $d(M,P) = d(M,Q) = d(M,R)$, el triángulo PQR es equilátero.

Ejercicio 23. Sean A_1, A_2 y A_3 en $\mathbb{R}^3$ tres puntos no alineados. Probar que el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, d(x, A_1) = d(x, A_2) = d(x, A_3)\}$$

es una recta ortogonal al plano que contiene a A_1, A_2 y A_3. Calcular S en el caso $A_1 = (1,-1,0)$, $A_2 = (0,1,1)$ y $A_3 = (1,1,2)$.

Ejercicio 24. Sea $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal, para el producto interno canónico, sobre el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 = 0\}$.

i) Encontrar una recta $L \subset \mathbb{R}^3$ tal que $P(L) = (1, 2, 1)$. ¿Es única?

ii) Encontrar una recta $L_1 \subset \mathbb{R}^3$ tal que $P(L_1) = L_2$ siendo $L_2 : \begin{cases} 2.x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$. ¿Es única?

Ejercicio 25. Hallar en $\mathbb{R}^n$ el complemento ortogonal a M que pasa por A, la proyección ortogonal de A sobre M y $d(A, M)$ en los siguientes casos:

i) $n = 3, \quad M : \begin{cases} 3.x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}, \quad A = (1, 0, 0)$

ii) $n = 4, \quad M : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2.x_1 - 3.x_4 = 2 \end{cases}, \quad A = (0, 2, 0, -1)$

Ejercicio 26. Dado en $\mathbb{R}^2$ el triángulo de vértices $A = (2, -3)$, $B = (8, 5)$ y $C = (14, 11)$, hallar la longitud de la altura que pasa por el vértice A.

Ejercicio 27. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ los puntos $O = (0, 0)$, $P = (a, b)$ y $Q = (c, d)$. Dichos puntos forman un triángulo isósceles con base $\overline{PQ}$. Probar que la altura correspondiente a la base corta a ésta en su punto medio.

Ejercicio 28. Sean en $\mathbb{R}^3$ los puntos $P_1 = (1, -1, 0)$ y $P_2 = (1, 1, 1)$. Encontrar tres planos H distintos tales que $d(P_1, H) = d(P_2, H)$.

Ejercicio 29. Sean en $\mathbb{R}^3$ la recta $L = < (1, 1, 2) >$ y el punto $P = (1, 0, -2)$. Encontrar un plano H ortogonal a L tal que $d(P, H) = \sqrt{6}$.

Ejercicio 30.

i) Calcular el ángulo entre las rectas de $\mathbb{R}^2$ definidas por $L_1 : x_1 - x_2 = 1$ y $L_2 : x_1 + x_2 = 3$.

ii) Hallar una recta L_3 tal que $\mathrm{Ang}(L_1, L_2) = \mathrm{Ang}(L_2, L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \in L_3$.

Ejercicio 31. Sea $L \subset \mathbb{R}^3$ la recta $L = < (1, -1, 1) > + \ (2, 1, 0)$. Encontrar un plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ tal que $(2, 1, 0) \in \Pi$ y $\mathrm{Ang}(L, \Pi) = \frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 32. Hallar la distancia entre M_1 y M_2 en los siguientes casos:

i) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 2.x_2 + x_3 = 1\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 2.x_2 + x_3 = 3\}$

ii) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 = 1 \,,\, x_1 - x_3 = 0\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \,,\, x_3 = 1\}$

iii) $M_1 = < (1, -1, 0), (2, 1, 1) > + (1, 0, 0)$
$M_2 = \{(3, 0, 1)\}$

iv) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = -2 \,,\, x_2 - 2.x_4 = 2\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \,,\, x_2 - 2.x_4 = -8 \,,\, x_1 - x_2 + x_4 = 5\}$

Ejercicio 33. Demostrar que si M_1 y M_2 son variedades lineales de $\mathbb{R}^n$ con $\dim M_1 \leq \dim M_2$ y $M_1 \parallel M_2$, entonces $d(M_1, M_2) = d(P, M_2)$ para todo $P \in M_1$.

Ejercicio 34.

i) Sea en $\mathbb{R}^2$ la recta L que pasa por los puntos $(2, -1)$ y $(5, 3)$. Determinar una recta $L' \parallel L$ tal que $d(L, L') = 2$.

ii) Sean $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$ y $M_2 = (1, 1, 1) + < (0, 1, 1), (1, 0, -2) >$. Hallar un plano H tal que $M_i \parallel H$ $(i = 1, 2)$ y $d(M_1, H) = d(M_2, H)$.

Ejercicio 35. Sean en $\mathbb{R}^3$ la recta $L = < (1, 2, -2) > + (0, 2, 0)$ y el punto $P = (1, 2, 2)$. Encontrar ecuaciones implícitas de una recta L' ortogonal a L tal que $d(P, L') = 3$ y $L \cap L' = \emptyset$. ¿Es única?

Ejercicio 36. Sea $L = < (3, 0, -4) > + (1, -1, 0)$. Encontrar una recta L' alabeada con L, tal que $d(L, L') = 2$.

Ejercicio 37.

i) Construir una rotación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(M_1) = M_2$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $M_1 = \{(1, 2, -1)\}, \quad M_2 = \{(-1, 2, 1)\}$

b) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 = 2,\ x_3 = 1\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 2.x_2 = 1,\ 3.x_2 - x_3 = -4\}$

c) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = 3\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = -3\}$

ii) Encontrar M_1 y M_2 variedades lineales de $\mathbb{R}^3$ de igual dimensión tales que no haya ninguna rotación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla $f(M_1) = M_2$.

Ejercicio 38. Sean en $\mathbb{R}^3$ los planos Π_1 y Π_2 definidos por las ecuaciones:

$$\Pi_1 : x_2 - x_3 = 1 \qquad \text{y} \qquad \Pi_2 : x_2 + x_3 = -1.$$

Definir una transformación ortogonal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\Pi_1) = \Pi_2$ y $f(\Pi_2) = \Pi_1$.

Ejercicio 39. Sea $k \in \mathbb{R}$ y sean Π_1 y Π_2 los planos en $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$\Pi_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \, x_1 - x_2 + 2x_3 = k\} \quad \text{y} \quad \Pi_2 = < (1, 0, 1), (0, 1, 2) > + (1, -1, 1).$$

Determinar k para que exista una simetría $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\Pi_1) = \Pi_2$. Para ese valor de k hallar dicha simetría y calcular $f(\Pi_2)$.