

Significado geométrico del gradiente

15 de mayo de 2020

Curvas de nivel

Supongamos que tenemos una función diferenciable

$f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, Sea $k \in \mathbb{R}$ y sea C la curva de nivel $f(x, y) = k$.

Suponemos $C \neq \emptyset$. Si $p = (x_0, y_0)$ es un punto de C y

$\sigma : (a, b) \rightarrow \mathcal{U}$ es una curva derivable y existe $a < t_0 < b$ tal que

① $\sigma(t) \in C$ para todo $a < t < b$

② $\sigma(t_0) = p$ entonces

$f(\sigma(t)) = k$ para todo $a < t < b$ y por lo tanto

$$(f \circ \sigma)'(t_0) = 0, \text{ pero } (f \circ \sigma)'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \sigma'(t_0)$$

por lo tanto si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ entonces

$$\nabla f(x_0, y_0) \perp \sigma'(t_0)$$

Nota

Cualquier vector tangente a C en p es un vector velocidad para alguna curva σ .

Proposición

Sea $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Sea $k \in \mathbb{R}$ y sea C la curva de nivel $f(x, y) = k$. Suponemos $C \neq \emptyset$. Si $p = (x_0, y_0)$ es un punto de C y $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal a la recta tangente a C por p .

Ejemplo

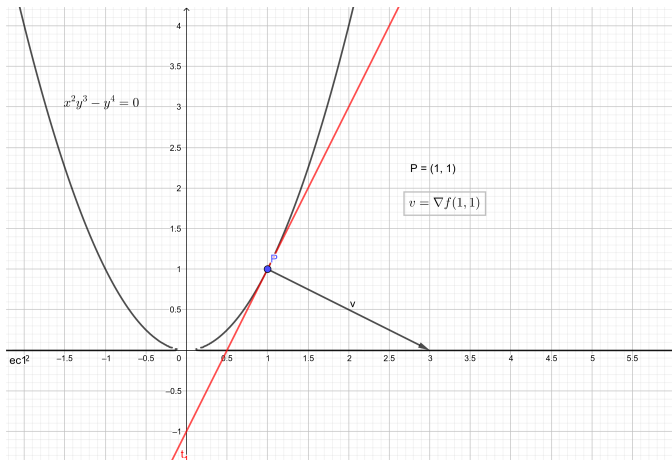
Tomemos $f(x, y) = x^2y^3 - y^4$ y sea C la curva de nivel 0 de f .
Tomemos $p = (1, 1)$, como $f(1, 1) = 0$ el punto $p \in C$. Tomemos la curva $\sigma(t) = (t, t^2)$, entonces

$$f(\sigma(t)) = f(t, t^2) = t^2(t^2)^3 - (t^2)^4 = t^8 - t^8 = 0$$

Por lo tanto $\sigma(t) \in C$ para todo t . Tenemos

$$\nabla f(x, y) = (2xy^3, 3x^2y^2 - 4y^3), \quad \nabla f(1, 1) = (2, -1),$$

$$\sigma'(1) = (1, 2), \quad (2, -1) \cdot (1, 2) = 0$$



Idea geométrica

Sea $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. una función diferenciable Sea

$p_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ y sea $q_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Si tenemos un vector $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ podemos considerar la curva

$$\sigma(t) = (tv_1 + x_0, tv_2 + y_0, f(tv_1 + x_0, tv_2 + y_0))$$

Esta curva está contenida en el gráfico de f y

$\sigma(0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Su derivada es

$$\sigma'(0) = \left(v_1, v_2, \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) \right)$$

Continuación

La tercer componente del vector $\sigma'(0)$ mide la pendiente vertical de la curva σ en el punto q_0

Problema

Queremos saber para que dirección de movimiento esa pendiente es máxima,

Nota

Hay que poner una restricción al problema. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es una constante positiva vale que

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda \vec{v}}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$$

por lo cual tomando $\lambda \rightarrow \infty$ se puede hacer la derivada direccional (si $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) \neq 0$) tan grande como uno quiera.

Solución

La restricción que ponemos es que $\|\vec{v}\| = 1$. Después de todo solo nos interesa la dirección representada por $\vec{v}$. Recordemos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v}$$

Si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ tenemos

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v} = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \|\vec{v}\| \cos(\theta) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos(\theta)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\vec{v}$

Como $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ tenemos

$$-||\nabla f(x_0, y_0)|| \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) \leq ||\nabla f(x_0, y_0)||$$

Si tomamos

$$\vec{v} = \frac{1}{||\nabla f(x_0, y_0)||} \nabla f(x_0, y_0)$$

entonces $\theta = 0$, $\cos(0) = 1$ y obtenemos el valor máximo

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = ||\nabla f(x_0, y_0)||$$

Otras dos direcciones interesantes son tomar $\theta = \pi$ en ese caso estamos tomando

$$\vec{v} = -\frac{1}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|} \nabla f(x_0, y_0)$$

y obtenemos la dirección de mayor decrecimiento. En general

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) &> 0 \Leftrightarrow \angle(\nabla f(x_0, y_0), \vec{v}) < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) &= 0 \Leftrightarrow \angle(\nabla f(x_0, y_0), \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) &< 0 \Leftrightarrow \angle(\nabla f(x_0, y_0), \vec{v}) > \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$