

Capítulo 4

Sistemas lineales y matrices

4.1 Introducción

En una reacción química un conjunto de reactivos en la proporción adecuada se transforma en otros productos diferentes. Por ejemplo



¿Cuánta es la cantidad de cada producto que participa en la reacción? Sabiendo que la cantidad de números de átomos se mantiene constante tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{K:} \quad a + b = 2e \\ \text{Mn:} \quad a = d \\ \text{O:} \quad 4a + 4c = 4d + 4e + g \\ \text{Cl:} \quad b = 2f \\ \text{H:} \quad 2c = 2g \\ \text{S:} \quad c = d + e \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{K:} \quad a + b - 2e = 0 \\ \text{Mn:} \quad a - d = 0 \\ \text{O:} \quad 4a + 4c - 4d - 4e - g = 0 \\ \text{Cl:} \quad b - 2f = 0 \\ \text{H:} \quad 2c - 2g = 0 \\ \text{S:} \quad c - d - e = 0 \end{array} \right.$$

Es decir que tenemos que resolver un sistema lineal, recordemos que este tipo de problema admite un planteo del tipo matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & -4 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En matemática del CBC hemos estudiado distintas herramientas que nos permiten hallar las soluciones del sistema encontrado. En este capítulo repasaremos esas herramientas.

4.2 Matrices

Definición 4.2.1.

Una **matriz** A es un tablero rectangular de números complejos a_{ij} de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

También se suele denotar de la siguiente manera $A = (a_{ij})_{n \times m}$. Los n m -vectores fila

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}), \dots, (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}).$$

son las **filas** de la matriz A . Los m n -vectores columnas

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

son las **columnas** de la matriz A .

Los elementos a_{ij} se llaman **elemento** (o componente) ij y aparecen en la i -ésima fila y en la j -ésima columna.

El orden de una matriz está dado por el número de filas y el número de columnas. Una matriz de n -filas y m -columnas, se denomina matriz de $n \times m$.

Ejemplo 4.2.2. *La siguiente es una matriz de 2×3*

$$A = \begin{pmatrix} 2 + 3i & -3 & 10 \\ -4 & 7 + 5i & -i \end{pmatrix}.$$

Notación 4.1.

El conjunto de todas las matrices de $n \times m$ se denota por $\mathbb{C}^{n \times m}$.

Con esta notación podemos pensar a los n -vectores filas como una matriz de $1 \times n$ y a los n -vectores columnas son matrices de $n \times 1$.

Definición 4.2.3.

Diremos que dos matrices A y B son iguales, si tienen la misma cantidad de filas y columnas y si sus elementos correspondientes coinciden. En el caso que A y B sean iguales notaremos $A = B$.

Ejemplo 4.2.4. *La afirmación*

$$\begin{pmatrix} x + y & 2z + w \\ x - y & z - w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 7i & 5 + 3i \\ 1 - 5i & 4 - 3i \end{pmatrix}$$

es equivalente a

$$\begin{aligned} x + y &= 3 - 7i, & 2z + w &= 5 + 3i, \\ x - y &= 1 - 5i, & z - w &= 4 - 3i. \end{aligned}$$

Definición 4.2.5.

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$. La matriz conjugada de A es la matriz que se obtiene al reemplazar todos los elementos de A por sus conjugados. Esta matriz se denota de la siguiente manera \overline{A} .

Ejemplo 4.2.6. *Sea $A = \begin{pmatrix} 3 - 7i & 5 + 3i \\ 1 - 5i & 4 - 3i \end{pmatrix}$. Entonces*

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{3 - 7i} & \overline{5 + 3i} \\ \overline{1 - 5i} & \overline{4 - 3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 7i & 5 - 3i \\ 1 + 5i & 4 + 3i \end{pmatrix}$$

Definición 4.2.7.

Una matriz se denomina **escalonada** si cumple con las siguientes propiedades:

- Todos las filas ceros están en la parte inferior de la matriz.
- El primer elemento distinto de cero de cada fila está a la derecha del primer elemento distinto de cero de la fila anterior.

Ejemplo 4.2.8. *Las siguientes matrices son escalonadas*

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} + 6i & 5 + 3i & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 3 + 5i & 4 - 3i & 10 & 1 + i \\ 0 & 0 & \pi + 3i & e & 1 - i \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}i & 8 + 9i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.3 Suma de matrices y producto por un número

Sean A y B dos matrices de $n \times m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}.$$

La **suma** de A y B se define de la siguiente manera

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}.$$

El **producto de un número complejo** k y una matriz A , se define de la siguiente manera

$$kA := \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{pmatrix}$$

Observemos que $A + B$ y kB son matrices de $n \times m$. Además definimos

$$-A = -1A \quad \text{y} \quad A - B = A + (-B).$$

Ejemplo 4.3.1. Hallar $A + B$, $(2 + i)A$ y $(2 + i)A - 3B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Solución. Comencemos por calcular $A + B$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+2 \\ 4-7 & 5+1 & -6+8 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(2+i)A &= (2+i) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2+i) \cdot 1 & (2+i) \cdot (-2) & (2+i) \cdot 3 \\ (2+i) \cdot 4 & (2+i) \cdot 5 & (2+i) \cdot (-6) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+i & -4-2i & 6+3i \\ 8+4i & 10+5i & -12-6i \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Por ultimo

$$\begin{aligned}(2+i)A - 3B &= (2+i) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+i & -4-2i & 6+3i \\ 8+4i & 10+5i & -12-6i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 0 & -6 \\ 21 & -3 & -24 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7+i & -4-2i & 3i \\ 29+4i & 7+5i & -36-6i \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La matriz de $n \times m$ cuyos elementos son todos nulos se conoce como la matriz nula y se denota por $0_{n,m}$ (o por 0). Obviamente

$$A + 0 = 0 + A = A$$

para todo $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$.

Propiedad 4.3.2.

Sean $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times m}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces

- (I) $A + B = B + A$;
- (II) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- (III) $A + 0 = A$ y $A + (-A) = 0$;
- (IV) $1A = A$ y $0A = 0$;
- (V) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- (VI) $\overline{\alpha(A + B)} = \overline{\alpha}(\overline{A} + \overline{B})$;
- (VII) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
- (VIII) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

4.4 Producto de matrices

En el Capítulo 2, definimos el producto entre m -vectores fila y un m -vector columna

$$(a_1, \dots, a_m) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \dots + a_m b_m,$$

Como ya vimos a los vectores los podemos pensar como matrices, es decir que la definición anterior la podemos extender a matrices.

Definición 4.4.1.

Sean

$$A = (a_1 \ \dots \ a_m) \in \mathbb{C}^{1 \times m} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times 1}.$$

Definimos el producto entre A y B de la siguiente manera

$$AB = a_1 b_1 + \dots + a_m b_m.$$

Vamos a utilizar esta herramienta para definir el producto entre matrices.

Definición 4.4.2.

Sean $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ y $B \in \mathbb{C}^{m \times q}$. Definimos el **producto entre A y B** como la matriz de $n \times q$ cuya entrada ij se obtiene multiplicando la i -ésima fila de A por la j -ésima columna de B .

Sean $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ y $B \in \mathbb{C}^{m \times q}$. Si denotamos con A_i a la i -ésima fila de A y con B^j a la j -ésima columna de B tenemos que

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & \dots & A_1 \cdot B^q \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & \dots & A_2 \cdot B^q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n \cdot B^1 & A_n \cdot B^2 & \dots & A_n \cdot B^q \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times q}.$$

Observemos que

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}.$$

Observación 4.4.3.

Si $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ y $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$. Entonces AB está definido solo en el caso que $m = p$.

Ejemplo 4.4.4. Calcular AB y BA (siempre que sea posible) en los siguientes casos

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solución.

$$(a) AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}$$

BA no está definida porque el número de columnas de B es 3 y el número de filas de A es 2.

$$(b) AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $AB \neq BA$ y por lo tanto el producto de matrices no es conmutativo.

$$(c) AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 0.$$

Esto muestra que $AB = 0$ no implica que $A = 0$ o $B = 0$.

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observación 4.4.5.

- (I) El producto de matrices **no es conmutativo**, es decir AB y BA no necesariamente son iguales.
- (II) $AB = 0$ **no implica** que $A = 0$ o que $B = 0$.

A continuación enumeramos las propiedades básicas del producto de matrices.

Propiedad 4.4.6.

- (I) Si $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ y $B \in \mathbb{C}^{m \times p}$ entonces

$$\overline{AB} = \overline{A} \overline{B};$$

- (II) Si $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times p}$ y $C \in \mathbb{C}^{p \times q}$, entonces

$$(AB)C = A(BC) \quad \text{Ley asociativa;}$$

- (III) Si $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times p}$ y $C \in \mathbb{C}^{m \times p}$, entonces

$$A(B + C) = AB + AC \quad \text{Ley distributiva por izquierda;}$$

- (IV) Si $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ y $C \in \mathbb{C}^{m \times p}$, entonces

$$(A + B)C = AC + BC \quad \text{Ley distributiva por derecha;}$$

- (V) Si $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times p}$ y $k \in \mathbb{C}$, entonces

$$k(AB) = (kA)B = A(kB).$$

4.5 Matriz transpuesta

La **transpuesta** de una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

es la matriz que se obtiene poniendo las filas de A como columnas (respetando el orden)

$$A^t := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

En otras palabras si A es una matriz de $n \times m$ entonces A^t es una matriz de $m \times n$ y $(A^t)_{ij} = A_{ji}$.

Ejemplo 4.5.1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 3-4i \\ 7i & 0 & 4 \end{pmatrix}$ entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 7i \\ 2+i & 0 \\ 3-4i & 4 \end{pmatrix}$.

Propiedad 4.5.2.

(I) Si $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ y $k \in \mathbb{C}$ entonces

$$(A + B)^t = A^t + B^t,$$

$$(A^t)^t = A,$$

$$(kA)^t = kA^t.$$

(II) Si $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ y $B \in \mathbb{C}^{m \times p}$ entonces

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Una matriz que tiene la misma cantidad de filas que de columnas se denomina **matriz cuadrada**.

Ejemplo 4.5.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ \pi & 0 & e & 4 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada.

Definición 4.5.4.

Una matriz A se denomina **simétrica** si $A^t = A$.

Ejemplo 4.5.5. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ es simétrica.

Observación 4.5.6.

Si A es simétrica entonces A es una matriz cuadrada. Por lo tanto si A no es cuadrada entonces no puede ser simétrica.

Definición 4.5.7.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Definimos la **transpuesta conjugada** de A de de A la siguiente manera

$$A^* = \overline{A}^t.$$

Ejemplo 4.5.8. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 3-4i \\ 7i & 0 & 4 \end{pmatrix}$ entonces

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -7i \\ 2-i & 0 \\ 3+4i & 4 \end{pmatrix}.$$

Observar que $A^* \neq A^t$, ver el Ejemplo 4.5.1.

Propiedad 4.5.9.

(I) Si $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ y $k \in \mathbb{C}$ entonces

$$(A+B)^* = A^* + B^*,$$

$$(A^*)^* = A,$$

$$(kA)^* = \overline{k}A^*.$$

(II) Si $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ y $B \in \mathbb{C}^{m \times p}$ entonces

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

Definición 4.5.10.

Una matriz A se denomina **hermitiana** si $A^* = A$.

Ejemplo 4.5.11. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2 \\ 1-i & 3 & 2i \\ 2 & -2i & \pi \end{pmatrix}$ es hermitiana.

Observación 4.5.12.

- (I) Si A es hermitiana entonces A es una matriz cuadrada. Por lo tanto si A no es cuadrada entonces no puede ser hermitiana.
- (II) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces $A^* = A^t$ y por lo tanto A es simétrica si y solo si es hermitiana.

4.6 Sistemas Lineales

Dado un sistemas de n -ecuaciones con m -incógnitas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{C}$ y $b_i \in \mathbb{C}$. Diremos que

- (4.1) es un sistema lineal ;
- a_{ij} son los coeficientes de (4.1) ;
- $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{C}^m$ es una **solución** de (4.1) si satisface cada una de las n -ecuaciones de (4.1);
- La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

se denomina la **matriz asociada** a (4.1). También se suele denominar la matriz de (4.1).

Con la notación matricial, el sistema lineal (4.1), se puede describir de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.6.1. *El sistema*

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 7 \\ x - 2y - 5z &= 3 \end{aligned}$$

se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada del sistema.

Otra definición que será de suma utilidad en este curso es la de matriz ampliada del sistema, más concretamente la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array} \right)$$

matriz ampliada del sistema (4.1).

Ejemplo 4.6.2. *La matriz*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & -5 & 3 \end{array} \right)$$

es la matriz ampliada del sistema del Ejercicio 4.6.1.

Diremos que el sistema (4.1) es

- **Homogéneo** si $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$;
- **No homogéneo** si existe $b_i \neq 0$.

Ejemplo 4.6.3. *El sistema del Ejercicio 4.6.1 es no homogéneo.*

Observación 4.6.4.

Un sistema lineal es homogéneo si y solo si el $\vec{0}$ es solución.

El sistema homogéneo

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m &= 0, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2m}x_m &= 0, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m &= 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

se denomina el **sistema lineal homogéneo asociado** a (4.1).

Ejemplo 4.6.5. *El sistema del Ejercicio 4.6.1 tiene el siguiente sistema homogéneo asociado*

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 0, \\ x - 2y - 5z &= 0. \end{aligned}$$

Teorema 4.6.6.

Sean $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ soluciones del sistema lineal homogéneo $Ax = 0$.
Entonces todo

$$\vec{v} \in \{k_1\vec{v}_1 + \cdots + k_n\vec{v}_n : k_1, \dots, k_n \in \mathbb{C}\}$$

es también una solución de $Ax = 0$.

Demostración. Sean $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{C}$ y

$$\vec{v} = k_1\vec{v}_1 + \cdots + k_n\vec{v}_n.$$

Por lo tanto

$$A\vec{v} = A(k_1\vec{v}_1 + \cdots + k_n\vec{v}_n) = k_1A\vec{v}_1 + \cdots + k_nA\vec{v}_n.$$

Por otro lado $A\vec{v}_1 = \cdots = A\vec{v}_n = 0$ por hipótesis, de lo que se deduce que

$$A\vec{v} = 0,$$

es decir que \vec{v} es una solución del sistema homogéneo $Ax = 0$. \square

El resultado anterior nos dice que cualquier sistema lineal homogéneo que tenga una solución distinta de cero tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 4.6.7. *Consideremos el sistema lineal homogéneo*

$$x + y = 0.$$

Entonces (x, y) es una solución del sistema si y solo si $y = -x$. Por lo tanto $(1, -1)$ es una solución del sistema, pero también lo son $(2, -2)$ y $(3, -3)$. Es más

$$\begin{aligned}\{(x, y): x + y = 0\} &= \{(x, y): y = -x\}, \\ &= \{(\lambda, -\lambda): \lambda \in \mathbb{C}\}, \\ &= \{\lambda(1, -1): \lambda \in \mathbb{C}\}.\end{aligned}$$

En el caso que el sistema lineal es no homogéneo tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.6.8.

Si \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son dos soluciones de $Ax = b$ entonces $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ es solución de $Ax = 0$.

Demostración. La demostración es sencilla

$$A(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = A\vec{v}_1 - A\vec{v}_2 = b - b = 0,$$

es decir $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ es una solución de $Ax = 0$. □

Comentario 4.6.9.

Lo que nos dice el resultado anterior es que si \vec{v}_0 una solución del sistema lineal no homogéneo $Ax = b$ entonces cualquier otra solución \vec{v} de $Ax = b$ se puede escribir de la siguiente manera $\vec{v} = v_0 + w$ donde w es una solución de $Ax = 0$.

Ejemplo 4.6.10. Consideremos el sistema lineal no homogéneo

$$x + y = 1.$$

No es difícil ver que $(1, 0)$ es una solución de nuestro sistema.

Por otro lado, en el Ejemplo 4.6.7, vimos que

$$\{\lambda(1, -1): \lambda \in \mathbb{C}\}$$

es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado al nuestro. Entonces

$$\{(x, y): x + y = 1\} = \{\lambda(1, -1) + (1, 0): \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Teorema 4.6.11.

Un sistema lineal $Ax = b$ o no tiene soluciones o tiene una única solución o tiene infinitas soluciones.

Usando este ultimo resultado podemos clasificar a los sistemas lineales de la siguiente manera:

Definición 4.6.12.

Decimos que un sistema lineal es

- **Compatible** si tiene solución, en este caso además puede distinguirse entre:
 - **Determinado** cuando tiene una única solución;
 - **Indeterminado** cuando admite un conjunto infinito de soluciones;
- **Incompatible** si no tiene solución.

Observación 4.6.13.

Todo sistema lineal homogéneo es compatible determinado o indeterminado ya que el $\vec{0}$ siempre es solución.

4.7 Aplicaciones: Modelo de Leontief

Supongamos un sistema económico que tiene n industrias y que posee dos tipos de demanda la externa y la interna. Por ejemplo si el sistema es un país la demanda externa puede provenir de otro país mientras que la demanda interna es la que se da entre las misma empresas del país.

Supongamos que e_i representa la demanda externa ejercida sobre la i -ésima industria y que a_{ij} representa la demanda interna que la j -ésima industria ejerce sobre la i -ésima. Mas concretamente a_{ij} representa el número de unidades de producción de la industria i que se necesitan para producir una unidad de la industria j . Notemos con x_i la producción de la industria i y supongamos que la producción de cada industria es igual a su demanda.

En estas condiciones podemos construir el siguiente sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 &= x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 &= x_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_n &= x_n \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n &= e_1 \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n &= e_2 \\ &\vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (1 - a_{nn})x_n &= e_n. \end{aligned}$$

Matricialmente nos que

$$\begin{pmatrix} (1 - a_{11}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1 - a_{22}) & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & (1 - a_{nn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.7.1. *El modelo de Leontief aplicado a un sistema económico de tres industrias. Supongamos que las demandas externas en un sistema de tres industrias son 10, 25 y 20 respectivamente. Supongamos que*

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 0.20 & a_{12} = 0.50 & a_{13} = 0.15 \\ a_{21} = 0.40 & a_{22} = 0.10 & a_{23} = 0.30 \\ a_{31} = 0.25 & a_{32} = 0.50 & a_{33} = 0.15 \end{array}$$

Matricialmente tenemos lo siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 0.8 & -0.5 & -0.15 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 \\ -0.25 & -0.5 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Solución. Hallar la todas la soluciones del sistema Para resolverlo planteamos la matriz ampliada del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.8 & -0.5 & -0.15 & 10 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 & 25 \\ -0.25 & -0.5 & 0.85 & 20 \end{array} \right).$$

Trabajamos con la filas de la matriz ampliada como si fueran la ecuaciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.8 & -0.5 & -0.15 & 10 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 & 25 \\ -0.25 & -0.5 & 0.85 & 20 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4/5 & -1/2 & -3/20 & 10 \\ -2/5 & 9/10 & -3/10 & 25 \\ -1/4 & -1/2 & 17/20 & 20 \end{array} \right)$$

Observemos que trabajar con las ecuaciones es equivalente a trabajar con las filas de la matriz ampliada. Nuestro primer objetivo es poner un 1 en la posición 11 de la matriz ampliada y poner 0 en la posiciones 21 y 31.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 4/5 & -1/2 & -3/20 & 10 \\ -2/5 & 9/10 & -3/10 & 25 \\ -1/4 & -1/2 & 17/20 & 20 \end{array} \right) \xrightarrow[\tilde{F}_3=4F_3]{\tilde{F}_1=10F_2; \tilde{F}_1=10F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -5 & -3/2 & 100 \\ -4 & 9 & -3 & 250 \\ -1 & -2 & 17/5 & 80 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\tilde{F}_3=F_1]{\tilde{F}_1=-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -17/5 & -80 \\ -4 & 9 & -3 & 250 \\ 8 & -5 & -3/2 & 100 \end{array} \right) \xrightarrow[\tilde{F}_3=F_3-8F_1]{\tilde{F}_2=F_2+4F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -17/5 & -80 \\ 0 & 17 & -83/5 & -70 \\ 0 & -21 & 257/10 & 740 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Nuestro segundo objetivo es poner un uno en la posición 22 y un 0 en la posición 32 de la matriz ampliada. Para eso dividimos a la F3 por 21 y F2 por 17

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -17/5 & -80 \\ 0 & 17 & -83/5 & -70 \\ 0 & -21 & 257/10 & 740 \end{array} \right) \xrightarrow[\tilde{F}_3=\frac{F_3}{21}]{\tilde{F}_2=\frac{F_2}{17}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -17/5 & -80 \\ 0 & 1 & -83/85 & -70/17 \\ 0 & -1 & 257/210 & 740/21 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\tilde{F}_3=F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -17/5 & -80 \\ 0 & 1 & -83/85 & -70/17 \\ 0 & 0 & 883/3570 & -1110/357 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\tilde{F}_3=3570/883F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -17/5 & -80 \\ 0 & 1 & -83/85 & -70/17 \\ 0 & 0 & 1 & 11100/883 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Esto nos dice que

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{11100}{883}, \\ x_2 - \frac{83}{85}x_3 &= -\frac{70}{17} \Rightarrow x_2 = \frac{104850}{883}, \\ x_1 + 2x_2 - \frac{17}{5}x_3 &= -80 \Rightarrow x_1 = \frac{97400}{883}. \end{aligned}$$

El metodo que utilizamos para resolver el sistema del ejemplo anterior se conoce como eliminación de Gauss-Jordan.

4.8 Eliminación de Gauss-Jordan

Dos sistemas lineales se dicen **equivalentes** si sus conjuntos de soluciones son iguales.

Ejemplo 4.8.1. *Los siguientes sistemas son equivalentes*

$$\begin{cases} x + (i + 1)y + (i + 1)z = 0, \\ y + z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que los dos sistemas tienen como solución el siguiente conjunto $S = \{\lambda(0, 1, -1) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ por ese motivo son equivalentes.

Proposición 4.8.2.

Dado un sistema lineal de ecuaciones, los siguientes cambios en las ecuaciones dan lugar a sistemas equivalentes:

- (I) Intercambiar dos ecuaciones de lugar;
- (II) Multiplicar una ecuación por una constante no nula;
- (III) Reemplazar una ecuación por ella misma más un múltiplo de otra.

Observación 4.8.3.

Sea A la matriz ampliada de un sistema lineal H . Efectuar las operaciones de la proposición anterior sobre las ecuaciones de H equivale a hacerlo sobre las filas de A .

Teorema 4.8.4.

Dado un sistema lineal de n ecuaciones con m incógnitas, aplicando los cambios descritos en la proposición anterior, puede obtenerse un sistema equivalente cuya matriz asociada es escalonada.

Ejemplo 4.8.5. *Resolver el siguiente sistema*

$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ ix - (1 + i)y = -1 - i. \end{cases}$$

Solución. Comencemos por plantear la matriz ampliada del sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ i & -(1+i) & -1-i \end{array} \right).$$

Ahora, aplicamos el método de eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ i & -(1+i) & -1-i \end{array} \right) & \xrightarrow{\tilde{F}2=F2-iF1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1+i & -1-i \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\tilde{F}2=\frac{(-1-i)}{2}F2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & i \end{array} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto nuestro sistema es equivalente al siguiente

$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ y = i. \end{cases}$$

Lo que nos dice que el sistema tiene una única solución $(2i, i)$. Por lo tanto el sistema es compatible determinado.

Ejemplo 4.8.6. Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5, \\ -x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$$

Solución. Comencemos por plantear la matriz ampliada del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 8 & -1 \end{array} \right).$$

Ahora, aplicamos el método de eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 8 & -1 \end{array} \right) & \xrightarrow[\tilde{F}3=F3+F1]{\tilde{F}2=F2-2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\tilde{F}3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto nuestro sistema es equivalente al siguiente

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$$

La segunda ecuación nos dice que

$$x_2 = 7x_3 - 1.$$

Reemplazando en la primera ecuación tenemos que

$$2 = x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 = x_1 + 14x_3 - 2 - x_3 = x_1 + 13x_3 - 2$$

y por lo tanto

$$x_1 = -13x_3 + 4.$$

Entonces el conjunto de soluciones de nuestro sistema es

$$\begin{aligned} S &= \{(-13t + 4, 7t - 1, t) : t \in \mathbb{C}\} \\ &= \{t(-13, 7, 1) + (4, -1, 0) : t \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema es compatible indeterminado.

4.9 Matrices Cuadradas

Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Definimos la **diagonal** de A , como el vector $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ y la **traza** de A , denotado $\text{tr}(A)$, como el escalar

$$\text{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Ejemplo 4.9.1. Por ejemplo las matrices del Ejemplo 4.8.5 tienen las siguientes traza:

$$\text{tr}(A) = 1 - (1 + i) = -i.$$

Algunos tipos particulares de matrices cuadradas que se utilizan frecuentemente

- **Matrices triangular superior:** $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tales que $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4i & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 + 7i & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1 + 6i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Matrices triangular inferior:** $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tales que $a_{ij} = 0$ si $i < j$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3i & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -10 + i & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Matrices diagonal:** $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tales que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} 1 + i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- **Matrices escalar:** $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una matriz diagonal tal que $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}$.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Observación 4.9.2.

Observemos que,

- Toda matriz escalar es diagonal;
- Toda matriz diagonal es simétrica;
- La matriz nula es escalar y por lo tanto diagonal, simétrica y hermitiana.

- **Matriz identidad:** $I_n = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una matriz escalar tal que $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$.

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observación 4.9.3.

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ entonces

- AB y BA están bien definidos;
- $AI_n = A = I_n A$, es decir, la matriz identidad es el neutro para el producto de matrices cuadradas.

Definición 4.9.4.

Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se dice **invertible** (o invertible) si existe $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $AB = BA = I_n$.

La matriz B de la definición es única. Habitualmente se denota $A^{-1} = B$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto de todas las matrices invertibles en \mathbb{C}^n se denota

$$GL(n) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n}; A \text{ es invertible}\}.$$

Una matriz cuadrada que no es invertible se llama **singular** y una matriz invertible se llama también **no singular**.

Proposición 4.9.5.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

- $I_n \in GL(n)$;
- Si $A \in GL(n)$ entonces $A^{-1} \in GL(n)$;
- Si $A, B \in GL(n)$ entonces $AB \in GL(n)$ y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- La matriz $A \in GL(n)$ si y solo si el sistema $Ax = b$ tiene una única solución para todo $b \in \mathbb{C}^{n \times 1}$.

Ejemplo 4.9.6. Halle, si es posible A^{-1} en cada uno de los siguientes casos

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Solución. En ambos casos, nos preguntamos si existe una matriz

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

tal que

$$AB = I_3$$

es decir

$$\left(A \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} \mid A \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} \mid A \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Que se pueden leer como tres sistemas diferentes

$$A \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si los tres sistemas tiene solución entonces la matriz A es inversible.

Como los tres sistemas tienen como matriz asociada a la matriz A , en lugar de resolverlos por separados podemos resolverlos los tres al mismo tiempo considerando al siguiente matriz ampliada

$$\left(A \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right. \right).$$

(a) Comencemos con el primer ejemplo

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{\tilde{F}_3 = F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\tilde{F}_2 = -F_3]{\tilde{F}_3 = F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\tilde{F}_3 = F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\tilde{F}_2 = F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\tilde{F}_2 = F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ejercicio para el lector, verificar que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) En el segundo caso sucede lo siguiente

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow[\tilde{F}_3 = F_3 + F_1]{\tilde{F}_2 = F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\tilde{F}_3 = F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

La tercer fila de la última matriz me indica que no existe solución. Por lo tanto en este caso A es no inversible o singular.

¿Cuál es la diferencia entre los dos casos? En el primer caso, luego de realizar la eliminación de Gauss-Jordan no aparecieron filas de ceros (esto implica que $\{x: Ax = 0\} = \{0\}$) mientras que en el segundo aparece una fila de ceros (esto implica que $\{x: Ax = 0\}$ tiene infinitas soluciones).

4.10 Rango de una matriz

Sean $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$. El **rango** de A es el número de filas que no se anulan al triangular A y convertirla en una matriz escalonada. El rango de A se denota de la siguiente manera $\text{rg}(A)$.

Ejemplo 4.10.1. Halle el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

y A^t .

Solución. Observemos que

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\tilde{F}_2 = F_2 - 5F_1; \tilde{F}_3 = F_3 - 6F_1 \\ \tilde{F}_4 = F_4 - 3F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -10 \\ 0 & -8 & -13 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\tilde{F}_4 = -\frac{F_4}{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -10 \\ 0 & -8 & -13 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\tilde{F}_2 = F_2 + 9F_4 \\ \tilde{F}_3 = F_3 + 8F_4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\tilde{F}_3 = F_3 - 5F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{F_4 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\text{rg}(A) = 3.$$

Calculemos el rango de A^t .

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\tilde{F}_3 = F_3 - 3F_1]{\tilde{F}_2 = F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & -9 & -8 & -8 \\ 0 & -10 & -13 & -11 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\tilde{F}_3 = F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & -9 & -8 & -5 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{F}_2 = F_2 - 9F_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 37 & -5 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Razonando de manera similar a como lo hicimos en el paso anterior tenemos que

$$\text{rg}(A^t) = 3.$$

Notemos que el rango de A es igual al rango de A^t .

Propiedad 4.10.2.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Entonces

- $0 \leq \text{rg}(A) \leq \min\{n, m\}$;
- $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t)$.

En el caso de las matrices cuadradas podemos utilizar la noción de rango para decidir si una matriz es invertible.

Proposición 4.10.3.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces $A \in GL(n)$ y solo si $\text{rg}(A) = n$.

Juntando esta propiedad con el último item del la Propiedad 4.9.5 se tiene el siguiente resultado

Teorema 4.10.4.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

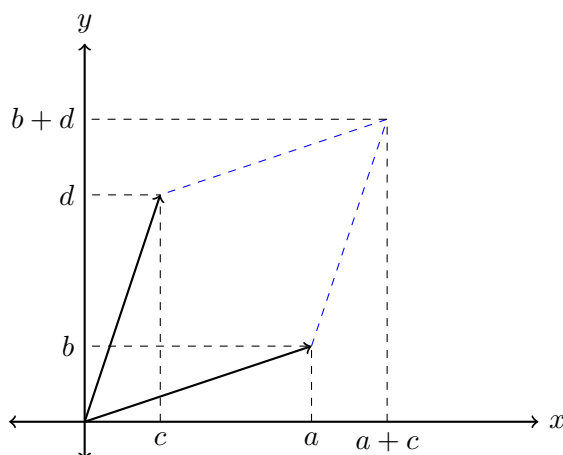
- $A \in GL(n)$;
- $\text{rg}(A) = n$;
- Para todo $b \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ el sistema $Ax = b$ tiene solución única.

4.11 Determinante de matrices de 2×2

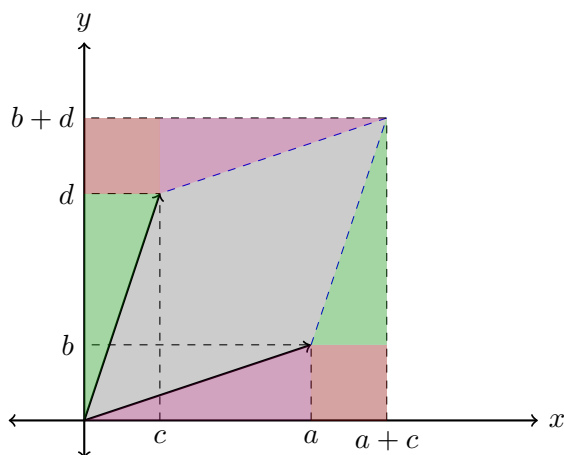
Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Supongamos que el $\text{rg}(A) = 2$. Entonces los vectores filas de A no están alineados (es decir no están en misma recta) y generan un paralelogramo en \mathbb{R}^2 .



Calculemos el área de este paralelogramo. Para el área del rectángulo de base $(a+c)$ y altura $(b+d)$ le restamos el área de las figuras geométricas que están entre el rectángulo y el paralelogramo.



$$\text{Área del paralelogramo} = (a+c)(b+d) - ab - 2cb - cd = ad - cb$$

Vamos a definir el determinante de A como el área (con signo) del paralelogramo que forman sus filas.

Definición 4.11.1.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$. Definimos el **determinante** de A de la siguiente manera

$$\det(A) = ad - bc.$$

Ejemplo 4.11.2. Calcular los determinantes de las siguientes matrices.

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Solución. Comencemos por el determinante de A .

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 0.$$

Esto nos dice que las filas de A no forman un paralelogramo, esto implica que los vectores fila están alineados. Por lo tanto el $\text{rg}(A) < 2$ y entonces A no es inversible.

En el caso de B tenemos lo siguiente

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

En este caso la filas de B si forman un paralelogramo y por lo tanto $\text{rg}(B) = 2$. Entonces podemos concluir que B es inversible.

Entonces el determinante nos da otra manera de decidir si una matriz es o no inversible.

Teorema 4.11.3.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

(I) Entonces A es inversible si y solo si $\det(A) \neq 0$.

(II) Si $\det(A) \neq 0$ entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.11.4. Sea $A = \begin{pmatrix} i & 4-i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Solución. Comencemos calculando el determinante de A .

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} i & 4-i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = i \cdot 1 - (4-i) \cdot (-i) = 1 + 5i.$$

Entonces A es inversible. Gracias al último teorema tenemos que

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{1+5i} \begin{pmatrix} 1 & -4+i \\ i & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1-5i}{26} \begin{pmatrix} 1 & -4+i \\ i & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-5i}{26} & \frac{1+21i}{26} \\ \frac{5+i}{26} & \frac{5+i}{26} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Propiedad 4.11.5.

Sea $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. Entonces A es inversible si y solo si $\det(A) \neq 0$

4.12 Determinante de matrices de 3×3

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Denotamos por M_{ij} la submatriz de A que se obtiene suprimiendo su i -ésima fila y j -ésima columna de A . M_{ij} se llama la **menor** ij de A . Observar que $M_{ij} \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$.

Ejemplo 4.12.1. Por ejemplo si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, & M_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, & M_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \\ M_{21} &= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, & M_{22} &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, & M_{23} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \\ M_{31} &= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, & M_{32} &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, & M_{33} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definición 4.12.2.

Sea $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$. Definimos el **determinante** de A de la siguiente manera

$$\det(A) = a_{11} \det(M_{11}) - a_{12} \det(M_{12}) + a_{13} \det(M_{13}).$$

Ejemplo 4.12.3. Calculemos el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

En el Ejemplo 4.12.1 calculamos M_{11} , M_{12} y M_{13} , entonces

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \\ &= 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} - (-1) \det \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} + 4 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot (-19) - 30 + 4 \cdot (-6) \\ &= -38 - 30 - 24 \\ &= -92. \end{aligned}$$

Para las matrices de 3×3 tenemos una fórmula más sencilla para calcular el determinante.

Observación 4.12.4.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Ejemplo 4.12.5. Usemos esta fórmula para calcular el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot 0 - (2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \cdot 2) \\ &= 6 - (-6) \\ &= 12. \end{aligned}$$

Al igual que en el caso de matrices de 2×2 tenemos el siguiente resultado.

Propiedad 4.12.6.

Sea $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$. Entonces A es inversible si y solo si $\det(A) \neq 0$

4.13 Matrices de $n \times n$

La definición de determinante para matrices de 3×3 se extiende a matrices de $n \times n$ de la siguiente manera:

Definición 4.13.1.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Definimos el **determinante** de A de la siguiente manera

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1j}).$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. El **cofactor** ij de A , denotado por A_{ij} , esta dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

Entonces

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j}.$$

Ejemplo 4.13.2. Calculemos el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
&\quad + 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= -92 - 3 \cdot (-70) + 5 \cdot 2 - 2 \cdot (-16) \\
&= 160.
\end{aligned}$$

En realidad uno puede elegir la fila que quiera, es decir

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

En este caso se dice que el determinante está desarrollado por la fila i -ésima.

Ejemplo 4.13.3. *Calculemos el determinante de la matriz anterior por la fila 2.*

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
&= -0 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
&\quad - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= -20 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 48 \\
&= 160.
\end{aligned}$$

También se puede desarrollar por columnas

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

En este caso se dice que el determinante está desarrollado por la columna j -ésima.

Ejemplo 4.13.4. Calculemos el determinante de la matriz anterior por la columna 1.

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
 &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
 &\quad + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \end{pmatrix} \\
 &= -92 + 2 \cdot 84 - 3 \cdot (-28) \\
 &= 160.
 \end{aligned}$$

Teorema 4.13.5.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces

$$\det(A^t) = \det(A).$$

Ejemplo 4.13.6. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} i & 4-i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

tiene como transpuesta

$$A^t = \begin{pmatrix} i & -i \\ 4-i & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculemos el determinante de A y A^t

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} i & 4-i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = i \cdot 1 - (4-i) \cdot (-i) = 1 + 5i.$$

$$\det(A^t) = \det \begin{pmatrix} i & -i \\ 4-i & 1 \end{pmatrix} = i \cdot 1 - (-i) \cdot (4-i) = 1 + 5i.$$

En el caso de matrices A de $n \times n$ también alcanza con calcular el $\det(A)$ para saber si A es inversible.

Teorema 4.13.7.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces A es inversible si y solo si

$$\det(A) \neq 0.$$

Ejemplo 4.13.8. Determinar para cada valor de α si el sistema es incompatible, o compatible.

$$\begin{cases} x + \alpha y + z = 1, \\ x + y + \alpha z = 1, \\ \alpha x + y + z = 1. \end{cases}$$

Solución. La matriz asociada del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si A es inversible entonces el sistema es compatible determinado. Calculemos el determinante de A ,

$$\det(A) = 1 + 1 + \alpha^3 - \alpha - \alpha - \alpha = \alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2).$$

Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$ entonces $\det(A) \neq 0$ y por lo tanto A es inversible lo que implica que el sistema es compatible determinado.

Cuando $\alpha = 1$, solo tenemos una ecuación

$$x + y + z = 1.$$

Como solo tengo una ecuación y tres incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

Veamos que pasa cuando α es igual a -2 . En este caso tenemos que

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ x + y - 2z = 1, \\ -2x + y + z = 1. \end{cases}$$

Planteemos la matriz ampliada del sistema y utilicemos el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & -2 & | & 1 \\ -2 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\tilde{F}_3 = F_3 + 2F_2]{\tilde{F}_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & -3 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{F}_3 = F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

La tercer fila de la ultima columna nos indica que el sistema es incompatible.
Respuesta: Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$ entonces el sistema es compatible determinado, si $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado y si $\alpha = -2$ es incompatible.

Ejemplo 4.13.9. Calcule el determinante de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 57 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 8 & e & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1/100 & 0 & 0 \\ -\pi & e & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución. En el primer caso desarrollamos los determinantes por la primer columna.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 57 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 8 & e & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 57 & \pi & 0 \\ 0 & 8 & e & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= -2 \cdot 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & e & 9 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= -2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot (-3) \cdot 2. \end{aligned}$$

Observar que es el producto de los elementos de la diagonal de A .

En el caso del determinante de B , si desarrollamos siempre por fila tenemos que

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1/100 & 0 & 0 \\ -\pi & e & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 100 \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/100 & 0 & 0 \\ e & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= 100 \cdot 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 1/100 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 100 \cdot 7 \cdot 1/100 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= 100 \cdot 7 \cdot 1/100 \cdot 4 \cdot 8. \end{aligned}$$

Observemos que nuevamente es el producto de los elementos de la diagonal.

Lo que se puede probar es que siempre que tengamos una matriz triangular superior o inferior vamos a tener que el determinante es el producto de los elementos de la diagonal de la matriz.

Teorema 4.13.10.

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de $n \times n$ triangular superior o inferior entonces

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Ejemplo 4.13.11. Entonces el determinante de la matriz identidad es

$$\det(I_n) = 1.$$

4.14 Propiedades del determinante

Teorema 4.14.1.

Sea A y B dos matrices de $\mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Ejemplo 4.14.2. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -5 \\ 11 & -7 & 5 \\ 10 & 2 & -18 \end{pmatrix}.$$

Luego $\det(A) = 16$, $\det(B) = -8$ y

$$\det(AB) = -128 = 16 \cdot (-8) = \det(A) \det(B).$$

Teorema 4.14.3.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Si A es invertible entonces

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Demostración. Sabemos que

$$I_n = AA^{-1}.$$

Entonces

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}),$$

y por lo tanto

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

□

Ejemplo 4.14.4. En el Ejemplo 4.11.4 vimos que

$$A = \begin{pmatrix} i & 4-i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

que su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-5i}{26} & \frac{1+21i}{26} \\ \frac{5+i}{26} & \frac{5+i}{26} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \det(A) &= i + (4-i)i = 1 + 5i, \\ \det(A^{-1}) &= \frac{1-5i}{26} \frac{5+i}{26} - \frac{5+i}{26} \frac{1+21i}{26} = \frac{5+i}{26} \left[\frac{1-5i}{26} - \frac{1+21i}{26} \right] \end{aligned}$$

Propiedad 4.14.5.

Si A es una matriz de $n \times n$ con una fila o columna de ceros entonces $\det(A) = 0$.

Ejemplo 4.14.6. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Si desarrollamos el determinante de A por la segunda fila tenemos que $\det(A) = 0$. Si desarrollamos el determinante de B por la tercer columna tenemos que $\det(B) = 0$.

Propiedad 4.14.7.

Sean $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$, y $k \in \mathbb{C}$. Si $B = (b_{ij})$ un matriz de $n \times n$ tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq i_0 \\ ka_{i_0j} & \text{si } i = i_0 \end{cases} \quad \text{o} \quad b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } j \neq j_0 \\ ka_{ij_0} & \text{si } j = j_0. \end{cases}$$

entonces $\det(B) = k \det(A)$.

Los que nos dice la propiedad anterior es lo siguiente

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i_01} & ka_{i_02} & \cdots & ka_{i_0n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = k \det(A),$$

y

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & ka_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & ka_{2j_0} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & ka_{nj_0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = k \det(A).$$

Ejemplo 4.14.8. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 12 & 4 & 16 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Como ya vimos $\det(A) = 16$. Calculemos el determinante de B .

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 \cdot 3 & 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = 64 = 4 \cdot 16 = 4 \det(A).$$

Por último calculemos el determinante de C .

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot (-1) & 2 \\ 3 & 2 \cdot 1 & 4 \\ 0 & 2 \cdot (-2) & 5 \end{pmatrix} = 32 = 2 \cdot \det(A).$$

Comentario 4.14.9.

Gracias a la Propiedad 4.14.7 tenemos que si A es una matriz de $n \times n$ y k es un número complejo entonces

$$\det(kA) = k^n \det(A).$$

Propiedad 4.14.10.

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de $n \times n$, tales que

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq i_0 \\ \alpha_{i_0j} & \text{si } i = i_0 \end{cases} \quad \text{o} \quad b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } j \neq j_0 \\ \alpha_{ij_0} & \text{si } j = j_0. \end{cases}$$

Si $C = (c_{ij})$ una matriz de $n \times n$ tal que

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq i_0 \\ a_{i_0j} + \alpha_{i_0j} & \text{si } i = i_0 \end{cases} \quad \text{o} \quad c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } j \neq j_0 \\ a_{ij_0} + \alpha_{ij_0} & \text{si } j = j_0. \end{cases}$$

entonces

$$\det(C) = \det(A) + \det(B).$$

En este caso la propiedad anterior nos dice que

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_01} + \alpha_{i_01} & a_{i_02} + \alpha_{i_02} & \cdots & a_{i_0n} + \alpha_{i_0n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \\ & = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_01} & a_{i_02} & \cdots & a_{i_0n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_01} & \alpha_{i_02} & \cdots & \alpha_{i_0n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

También resulta que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j_0} + \alpha_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j_0} + \alpha_{2j_0} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj_0} + \alpha_{nj_0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \\ = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j_0} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj_0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \alpha_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \alpha_{2j_0} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \alpha_{nj_0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.14.11. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

y

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1-6 & 2 \\ 3 & 1+2 & 4 \\ 0 & -2+4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\det(A) = 16$, $\det(B) = 108$ y $\det(C) = 124 = \det(A) + \det(B)$.

Comentario 4.14.12.

No vale en general que $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$. Por ejemplo si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces $A+B=0$ y por lo tanto $\det(A+B) = 0$.

Por otro lado el $\det(A) = \det(B) = 1$, entonces

$$\det(A) + \det(B) = 2 \neq 0 = \det(A+B).$$

Propiedad 4.14.13.

Sea A una matriz de $n \times n$. Si B es una matriz de $n \times n$, que se obtiene intercambiando dos filas o columnas de A entonces

$$\det(B) = -\det(A).$$

Ejemplo 4.14.14. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\det(A) = 16$, $\det(B) = -16 = -\det(A)$ y $\det(C) = -16 = -\det(A)$.

Propiedad 4.14.15.

Si A es una matriz de $n \times n$ que tiene dos filas o columnas iguales entonces $\det(A) = 0$.

Demostración. Supongamos que A tiene dos filas iguales. Sea B la matriz que se genera por intercambiar las dos filas que son iguales entonces $A = B$ y $\det(B) = -\det(A)$. Por lo tanto $\det(A) = -\det(A)$, lo que implica que $2\det(A) = 0$ y por lo tanto $\det(A) = 0$. \square

Ejemplo 4.14.16. Por ejemplo un calculo directo nos muestra que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$

Combinando las Propiedades 4.14.7 y 4.14.15 tenemos el siguiente resultado.

Propiedad 4.14.17.

Sea A una matriz de $n \times n$. Si una fila (o columna) de A es un múltiplo escalar de otra fila (o columna) de A entonces $\det(A) = 0$.

Ejemplo 4.14.18. Por ejemplo un calculo directo nos muestra que

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ -4 & 6 & -10 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} = 0.$$

Propiedad 4.14.19.

Sea A una matriz de $n \times n$. Si B es una matriz de $n \times n$, que se obtiene sumando un múltiplo escalar de una fila (o columna) de A a otra fila (o columna) entonces $\det(B) = \det(A)$

Ejemplo 4.14.20. Calcular el determinante de la siguiente matriz utilizando las propiedades vistas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Solución. Para calcular el determinante utilizaremos las propiedades que hemos visto y la eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} \det(A) &\stackrel{\tilde{F}_3 = F_3 - 2F_1}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\tilde{F}_4 = F_4 - 3F_1}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\tilde{F}_3 = F_3 - 5F_2}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\tilde{F}_4 = F_4 - 7F_2}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -16 & -18 \\ 0 & -32 & -26 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -16 & -18 \\ -32 & -26 \end{pmatrix} \\ &= -(-16) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -18 \\ 2 & -26 \end{pmatrix} = 16 \cdot (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} \\ &= -32 \cdot (13 - 2 \cdot 9) = -32 \cdot (-5) = 160. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.14.21. Calcular el determinante de las siguientes matrices utilizando las propiedades vistas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -5 & -1 & 3 & 7 & -9 \end{pmatrix}.$$

Solución. Como en el ejercicio anterior calcularemos el determinante utilizaremos las propiedades que hemos visto y la eliminación de Gauss-Jordan.

$$\det(A) \stackrel{\tilde{F}_5 = F_5 + F_2}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\tilde{F}_5 = F_5 + F_4}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como tenemos una fila de ceros, resulta que $\det(A) = 0$.

Ejemplo 4.14.22. Sean

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & d \\ b & 2 & e \\ c & 3 & f \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 2a - d & a & 3 - 5a \\ 2b - e & b & 6 - 5b \\ 2c - f & c & 9 - 5c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

Se sabe que $\det(A) = 2$.

(a) Calcular $\det(B)$.

(b) Calcular $\det(\frac{1}{4}A^t B^{-1}A^5)$.

Solución. (a) Lo que tenemos que hacer es relacionar el determinante de A con el de B , utilizando las propiedades del determinante.

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 2a & a & 3 - 5a \\ 2b & b & 6 - 5b \\ 2c & c & 9 - 5c \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -d & a & 3 - 5a \\ -e & b & 6 - 5b \\ -f & c & 9 - 5c \end{pmatrix}.$$

El primero de los dos determinante es 0 puesto que la columna 1 es un múltiplo de la columna 2. Entonces

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} -d & a & 3-5a \\ -e & b & 6-5b \\ -f & c & 9-5c \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -d & a & 3 \\ -e & b & 6 \\ -f & c & 9 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -d & a & -5a \\ -e & b & -5b \\ -f & c & -5c \end{pmatrix}.$$

En este caso el último determinante es 0 puesto que la columna 3 es un múltiplo de la columna 2.

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det \begin{pmatrix} -d & a & 3 \\ -e & b & 6 \\ -f & c & 9 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} d & a & 3 \\ e & b & 6 \\ f & c & 9 \end{pmatrix} \text{ sacamos el } -1 \text{ de la } C1 \\ &= \det \begin{pmatrix} a & d & 3 \\ b & e & 6 \\ c & f & 9 \end{pmatrix} \text{ intercambiamos } C1 \text{ por } C2 \\ &= -\det \begin{pmatrix} a & 3 & d \\ b & 6 & e \\ c & 9 & f \end{pmatrix} \text{ intercambiamos } C2 \text{ por } C3 \\ &= -3 \det \begin{pmatrix} a & 1 & d \\ b & 2 & e \\ c & 3 & f \end{pmatrix} \text{ extraemos un } 3 \text{ de la } C3 \\ &= -3 \det(A) = -6. \end{aligned}$$

(b) Comencemos por sacar el $\frac{1}{4}$ del determinante

$$\det \left(\frac{1}{4} A^t B^{-1} A^5 \right) = \left(\frac{1}{4} \right)^3 \det(A^t B^{-1} A^5).$$

Ahora usamos la propiedad que nos dice que el determinante se distribuye con respecto al producto de matrices.

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{1}{4} A^t B^{-1} A^5 \right) &= \frac{1}{64} \det(A^t) \det(B^{-1}) \det(A^5) \\ &= \frac{1}{64} \det(A^t) \det(B^{-1}) (\det(A))^5. \end{aligned}$$

Ahora usamos que $\det(A^t) = \det(A)$ y que $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)}$, entonces

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{1}{4} A^t B^{-1} A^5 \right) &= \frac{1}{64} \det(A^t) \det(B^{-1}) (\det(A))^5 \\ &= \frac{1}{64} \frac{1}{\det(B)} (\det(A))^6 \\ &= \frac{1}{64} \frac{1}{(-6)} 2^6 \\ &= -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Teorema 4.14.23 (Resumen: Matrices inversibles).

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- (I) A es inversible;
- (II) La única solución del sistema homogéneo $Ax = 0$ es la solución trivial (es decir $x = 0$);
- (III) El sistema $Ax = b$ tiene solución única para todo $b \in \mathbb{C}^{n \times 1}$;
- (IV) La matriz A es equivalente a la matriz identidad;
- (V) El rango de A es n ;
- (VI) Es $\det(A)$ es distinto de cero.