Capítulo 3

Números complejos

3.1 Definición

La ecuación

$$x^2 = -1 \tag{3.1}$$

no posee soluciones en $\mathbb{R}$ ya que cualquier número real elevado al cuadrado es positivo. Para resolver este problema introducimos un número imaginario i que tiene la siguiente propiedad

$$i^2 = -1.$$

Utilizando este nuevo número podemos ver que la ecuación (3.1) posee dos soluciones i y $-i$. También podemos utilizar este número imaginario para definir un nuevo conjunto de números.

Definición 3.1.1.

Un número complejo es una expresión de la forma

$$a + bi \tag{3.2}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$. El conjunto de todos los números complejos se denota por

$$\mathbb{C} := \{a + bi \colon a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

y la expresión (3.2) se denomina **forma binómica** .

Ejemplo 3.1.2. *Los siguientes números son complejos:*

$$2 + \sqrt{2}i, 3 - \pi i, 4i, 5.$$

Definición 3.1.3.

Sea $z = a + bi$ un número complejo. Decimos que a es la **parte real** de z (notamos $\mathrm{Re}(z)$) y que b es la **parte imaginaria** de z (notamos $\mathrm{Im}(z)$).

Ejemplo 3.1.4. *Observemos que*

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Re}(2+\sqrt{2}i) = 2 & \mathrm{Im}(2+\sqrt{2}i) = \sqrt{2}; \\ \mathrm{Re}(3-\pi i) = 3 & \mathrm{Im}(3-\pi i) = -\pi; \\ \mathrm{Re}(4i) = 0 & \mathrm{Im}(4i) = 4; \\ \mathrm{Re}(5) = 5 & \mathrm{Im}(5) = 0. \end{array}$$

Definición 3.1.5.

Diremos que dos números complejos z y w son iguales si y solo si

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \quad \text{y} \quad \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w).$$

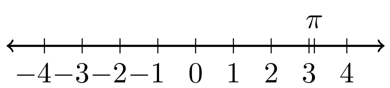
Para finalizar esta sección observemos que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Más allá de sus aplicaciones en matemáticas, los números complejos se utilizan en diversas aplicaciones como por ejemplo en electricidad, procesamiento de señales, lo cual es útil en tecnología celular y tecnologías inalámbricas, así como en radares e incluso biología (ondas cerebrales). Esencialmente, si lo que se mide se basa en una onda senoidal o cosenoidal.

3.2 Representación gráfica

Sabemos que los números reales se representan gráficamente a través de la recta real

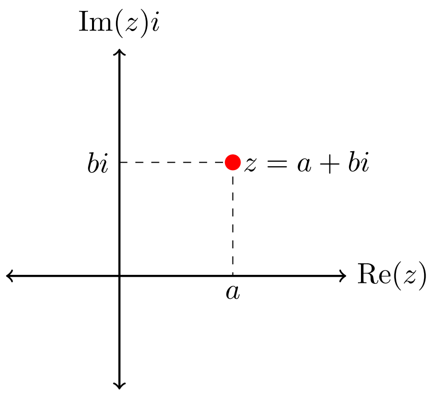


Naturalmente surge la siguiente pregunto ¿cómo representamos gráficamente a los números complejos?

Como todo número complejo z tiene asociado dos números reales $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$, podemos relacionar a $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, es decir

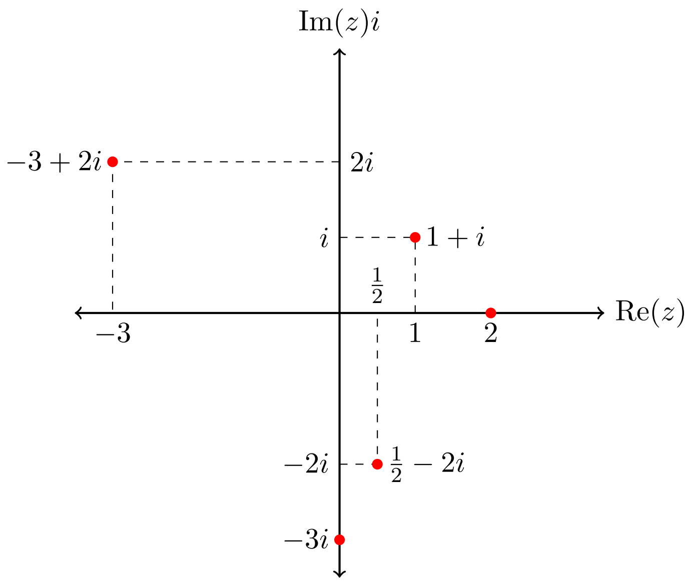
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^2 \\ a+bi & \to & (a,b). \end{array}$$

Estos nos permite representar gráficamente a los números complejos de la siguiente manera



Ejemplo 3.2.1. *Representar gráficamente los siguientes números complejos* $1+i$, 2, $\frac{1}{2}-2i$, $-3+2i$ *y* $-3i$

Solución. La representación gráfica de los complejos dados es la siguiente

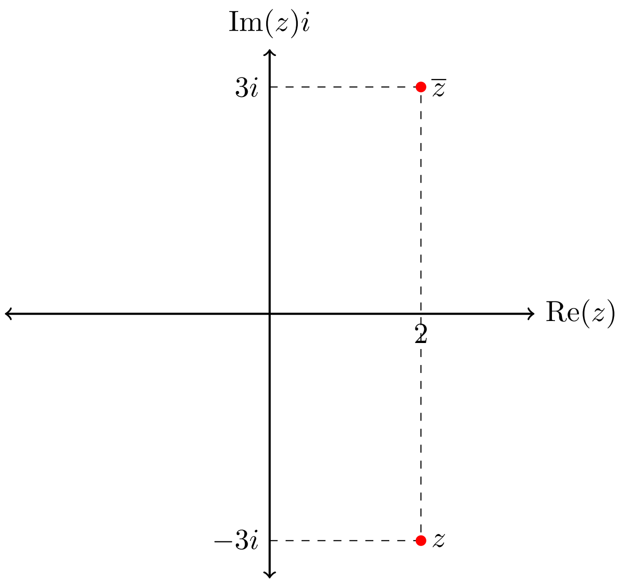


Definición 3.2.2.

Dado un número complejo $z = a + bi$ definimos el **conjugado** de z (que se denota por $\overline{z}$) como el número complejo

$$\overline{z} = a - bi.$$

Ejemplo 3.2.3. *Sea* $z = 2 - 3i$ *entonces* $\overline{z} = 2 + 3i$.



Observemos que $\overline{\overline{z}} = z$.

Proposición 3.2.4.

Sea z un número complejo. Entonces $\overline{\overline{z}} = z$.

3.3 Modulo de un número complejo

Como acabamos de ver, dado número complejo $z = a + bi$ tenemos asociado a un punto $P = (a, b)$. Utilizando esta relación definimos el **modulo** de z de la siguiente manera

$$|z| = d(P, 0) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ejemplo 3.3.1. *Calcular el modulo de los siguientes números complejos* $1 + i$, 2, $\frac{1}{2} - 2i$, $-3 + 2i$ *y* $-3i$

Solución.

$|1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$; $\quad |2| = \sqrt{2^2} = 2$;

$|\frac{1}{2} - 2i| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$; $\quad |-3 + 2i| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$|-3i| = \sqrt{(-3)^2} = 3.$

Propiedad 3.3.2.

Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.

Demostración. Sea $z = a + bi$ un número complejo. Entonces

$$|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0$$

La única manera que dos números reales mayores o iguales que cero sumen cero es que los dos números sean cero, por lo tanto

$$a^2 = b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

□

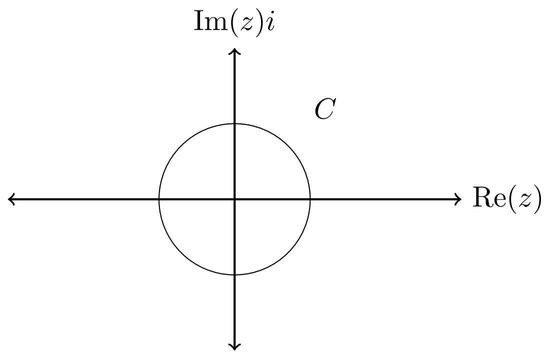
Ejemplo 3.3.3. *Graficar el siguiente conjunto*

$$C = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}.$$

Solución. C esta formada por todos los números complejos $z = a+bi$ tales que

$$1 = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \|(a, b)\| = d(P, 0)$$

donde $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Entonces por lo visto en el Ejemplo 2.6.4 tenemos que



3.4 Suma y resta de números complejos

Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ dos números complejos. Definimos la **suma** entre z_1 y z_2 de la siguiente manera

$$z_1 + z_2 := a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i.$$

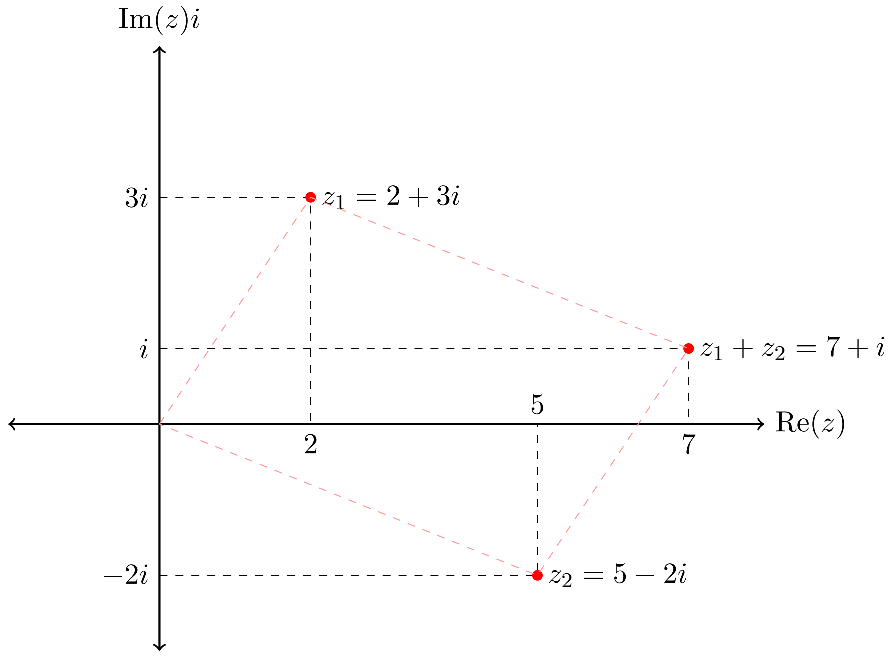
Mientras que la **resta** se define de la siguiente manera

$$z_1 - z_2 := a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i.$$

Ejemplo 3.4.1. *Sean* $z_1 = 2 + 3i$ *y* $z_2 = 5 - 2i$. *Entonces*

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 2i) = 7 + i.$$

Veamos lo que sucede



Lo que podemos observar en este ejemplo es que la ley del paralelogramo se satisface para la suma de complejos.

Propiedad 3.4.2.

Sean z_1, z_2 y z_3 tres números complejos. Entonces

(I) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (propiedad conmutativa);

(II) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (propiedad asociativa);

(III) $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$.

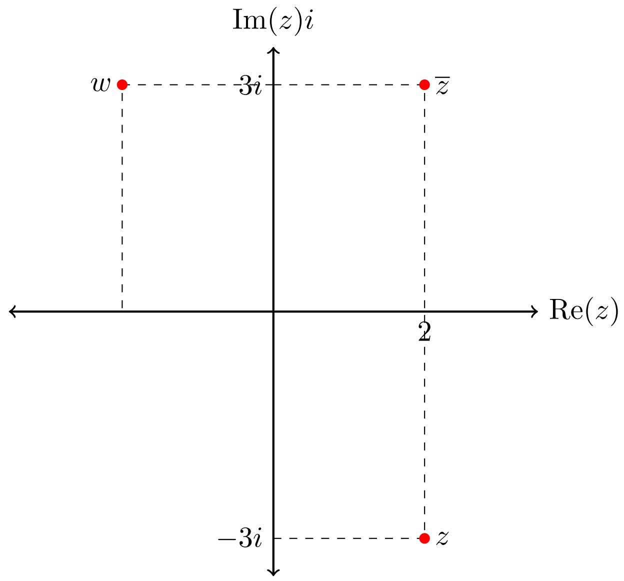
El elemento **neutro para la suma** es el cero ya que

$$0 + z = z \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Definición 3.4.3.

Dado un número complejo $z = a + bi$ definimos el **opuesto** de z de la siguiente manera $-a - bi$.

Ejemplo 3.4.4. *Si $z = 2-3i$ entonces $w = -2+3i$ es el opuesto de z, más aún z es el opuesto de w y $z+w=0$.*



Lo que acabamos de observar en el ejemplo anterior en realidad vale siempre.

Propiedad 3.4.5.

Si z es un número complejo y w es el opuesto de z. Entonces

(I) $z + w = 0$;

(II) z es el opuesto de w.

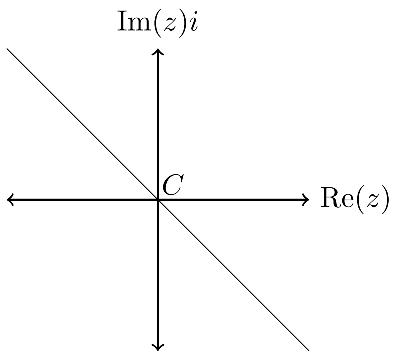
Ejemplo 3.4.6. *Graficar el siguiente conjunto*

$$C = \{z \in \mathbb{C}^2 \colon |z-1| = |z+i|\}.$$

Solución. Sea $z = a+bi \in C$. Entonces

$$\begin{aligned} |z-1| = |z+i| &\iff |a-1+bi| = |a+(b+1)i| \\ &\iff \sqrt{(a-1)^2+b^2} = \sqrt{a^2+(b+1)^2} \\ &\iff a^2-2a+1+b^2 = a^2+b^2+2b+1 \\ &\iff -a = b. \end{aligned}$$

Por lo tanto C es una recta.



Tarea para el lector: Relacionar con el Ejercicio 2.6.4.

3.5 Producto de números complejos

Dados dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, definimos el **producto** de la siguiente manera

$$\begin{aligned} zw &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + cbi + bdi^2, \\ &= ac + (ad + cb)i + bdi^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, utilizando que $i^2 = -1$, tenemos que

$$zw = ac - bd + (ad + cb)i.$$

Ejemplo 3.5.1. *Sean $z = 2 + 3i$ y $w = 5 - 2i$. Entonces*

$$zw = (2 + 3i)(5 - 2i) = (2 \cdot 5 - 3 \cdot (-2)) + (2 \cdot (-2) + 5 \cdot 3)i = 16 + 11i.$$

Propiedad 3.5.2.

Sean z_1, z_2, y z_3 tres números complejos. Entonces

(I) $z_1z_2 = z_2z_1$ (propiedad conmutativa);

(II) $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ (propiedad asociativa);

(III) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_2z_3$ (propiedad distributiva).

El elemento **neutro para la producto** es el uno ya que

$$1z = z \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Dado n un número natural y z un número complejo definimos

$$z^n = \underbrace{z \cdots z}_{n-\text{veces}}$$

Propiedad 3.5.3.

Sean z, w dos números complejos entonces

$$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w} \quad \text{y} \quad \overline{z^n} = \overline{z}^n.$$

Demostración. Sean $z = a+bi$ y $w = c+di$ dos números complejos. Entonces

$$\begin{aligned} zw &= ac - bd + (ad + bc)i \\ \overline{z}\,\overline{w} &= (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{zw}. \end{aligned}$$

Mientras que el segundo item se deduce del primero y queda como ejercicio para el lector. □

La próxima propiedad relaciona al modulo con el producto.

Propiedad 3.5.4.

Sean z y w dos números complejos. Entonces

(I) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$;

(II) $|\overline{z}| = |z|$;

(III) $|zw| = |z||w|$;

(IV) $|z^n| = |z|^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sean $z = a+bi$ y $w = c+di$ dos números complejos. Entonces

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b(-b) + (a(-b) + ba)i = a^2 + b^2 = |z|^2$$

lo que demuestra (I).

El punto (II) es inmediato a partir de las definiciones.

Para el item (III), observemos que

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z}\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2.$$

Entonces $|zw| = |z||w|$, con lo cual hemos demostrado (III).

Por último par (IV), notamos que

$$|z^n|^2 = z^n\overline{z^n} = z^n\overline{z}^n = (z\overline{z})^n = |z|^{2n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De lo que se deduce que $|z^n| = |z|^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

3.6 Inverso multiplicativo y división

En esta sección nos preguntamos para que números complejos z existe un número complejo w tal que $zw = 1$.

Ejemplo 3.6.1. *Sabemos que*

$$-1 = i^2 = i \cdot i \Longrightarrow 1 = (-i) \cdot i,$$

Entonces si $z = i$ tenemos que $w = -i$.

Tomemos $z = a + bi$, entonces

- Si $b = 0$ entonces $z \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $w = \dfrac{1}{a}$ siempre que $a \neq 0$. Si $a = b = 0$ entonces $z = 0$ y por lo tanto no existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $zw = 1$.
- Si $b \neq 0$, lo que estamos buscando es un número complejo $w = c + di$ tal que

  $$1 = zw = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

  es decir buscamos números reales a, b, c, d tales que

  $ac - bd = 1$

  $ad + bc = 0 \Longrightarrow c = -\dfrac{ad}{b}$ recordad que estamos considerando el caso $b \neq 0$.

  Entonces

  $$1 = ac - bd = -a\frac{ad}{b} - bd = -\frac{a^2 + b^2}{b}d,$$

  de lo que se deduce que

  $$d = -\frac{b}{a^2 + b^2} \text{ y } c = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

  Por lo tanto

  $$w = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{a - bi}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Definición 3.6.2.

Sea $z = a + bi$ un número complejo distinto de cero. El número complejo

$$\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$$

se denomina el **inverso multiplicativo** de z y se denota por

$$z^{-1} \text{ o } \frac{1}{z}.$$

Ejemplo 3.6.3. *Hallar el inverso multiplicativo de $z = 4 + 7i$.*

Solución. Observemos que $|z| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$. Entonces

$$z^{-1} = \frac{4 - 7i}{65}.$$

Verifiquemos

$$zz^{-1} = (4 + 7i)\frac{4 - 7i}{65} = \frac{(4 + 7i)(4 - 7i)}{65} = \frac{16 + 49}{65} = 1 \checkmark$$

Definición 3.6.4.

Dados dos números complejos z y w con $w \neq 0$. Definimos la **división** de z por w de la siguiente manera

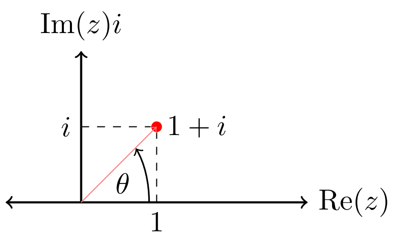
$$\frac{z}{w} := \frac{z\overline{w}}{|w|^2}.$$

Ejemplo 3.6.5.

$$\begin{aligned} \frac{1 - i}{4 + 7i} &= (1 - i)\left(\frac{4 - 7i}{|4 + 7i|^2}\right) \\ &= (1 - i)\left(\frac{4 - 7i}{65}\right) \\ &= \frac{4}{65} - \frac{7}{65} + \left(-\frac{4}{65} - \frac{7}{65}\right)i \\ &= -\frac{3}{65} - \frac{11}{65}i. \end{aligned}$$

3.7 Argumento

Notemos que



El complejo $1 + i$ tiene asociado una vector $\vec{v} = (1, 1)$ en $\mathbb{R}^2$. Entonces podemos representar a $1 + i$ por su modulo (la norma de $\vec{v}$) y el ángulo que forma con el semieje $\mathrm{Re}(z) > 0$ en el sentido de giro contrario a las agujas del reloj. $\arg(1 + i) = \pi/4$.

Definición 3.7.1.

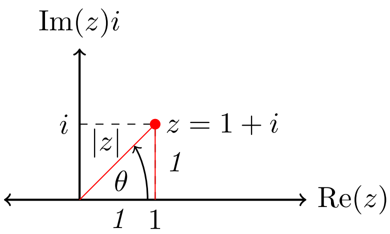
Dado w un número complejo distinto de cero, el ángulo que forma w con el semieje $\mathrm{Re}(z) > 0$ en el sentido de giro contrario a las agujas de reloj, se denomina **argumento** de w y se denota $\arg(w) \in [0, 2\pi)$.

En el caso que $z = 0$ definimos $\arg(z) = 0$.

Ejemplo 3.7.2. *En lo siguientes casos es muy simple observar el argumento de*

$$
\begin{array}{llll}
z_1 = i & \to & |z_1| = 1 & arg(z_1) = \dfrac{\pi}{2}; \\
z_2 = -1 & \to & |z_2| = 1 & arg(z_2) = \pi; \\
z_3 = -i & \to & |z_3| = 1 & arg(z_3) = \dfrac{3}{2}\pi; \\
z_4 = 1 & \to & |z_4| = 1 & arg(z_4) = 0;
\end{array}
$$

Ejemplo 3.7.3. *¿Cómo nos damos cuenta que* $arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$*?*



Observemos que 0, 1 *y* $1+i$ *forman un triángulo rectángulo. Entonces*

$$\cos(\theta) = \frac{1}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin(\theta) = \frac{1}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Entonces

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Verifiquemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad y \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \checkmark$$

Observemos que

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Si $z = a + bi$ es un número complejo no nulo y $\theta = \arg(z)$ entonces

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \quad \text{y} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}.$$

Por lo tanto número complejo z se puede representar de la siguiente manera

$$z = |z| \left(\cos(\theta) + i \sin(\theta)\right) \tag{3.3}$$

donde $\theta = \arg(z)$. La expresión (3.3) se denomina la **forma polar** de z.

Ejemplo 3.7.4. *Hallar la forma polar de* $1 - i$.

Solución. Calculamos primero el modulo de $1 - i$,

$$|1 - i| = \sqrt{2}.$$

Entonces

$$\cos(\theta) = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \sin(\theta) = \frac{-1}{|z|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.4}$$

Por lo tanto

$$\tan(\theta) = -1 \Longrightarrow \theta = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \notin [0, 2\pi).$$

Entonces θ no es el argumento de $1 - i$. ¿Qué hago? Sabemos que $\tan(\theta + k\pi) = \tan(\theta)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, también tenemos que los siguiente ángulos tienen la misma tangente

$$\begin{aligned}
-\tfrac{\pi}{4} + \pi &= \frac{3}{4}\pi \in [0, 2\pi), \\
-\tfrac{\pi}{4} + 2\pi &= \frac{7}{4}\pi, \in [0, 2\pi), \\
-\tfrac{\pi}{4} + 3\pi &= \frac{11}{4}\pi > 2\pi
\end{aligned}$$

paramos de sumar π porque el último ángulo encontramos es mayor que $2pi$ y por ende si sigo sumando π todos los ángulos que obtengamos resultarán mayores que π. Tengo dos posibles argumentos para $1 - i$: $\frac{3}{4}\pi$ y $\frac{7}{4}\pi$. ¿Cómo decido cual es el correcto? Evaluando

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} & \qquad \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \qquad \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Luego por (3.4), resulta que $\theta = \frac{7}{4}\pi$. Luego

$$1 - i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right).$$

Ejemplo 3.7.5. *Encontrar la forma polar y binómica para*

$$z = 2 \left(\cos\left(\frac{9}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{9}{4}\pi\right)\right).$$

Solución. Uno estaría tentado a decir que la expresión que nos dieron es la forma polar de z, pero lamentablemente es no es así ya que $\frac{9}{4}\pi > 2\pi$ y por lo tanto no puede ser el argumento de z. Pero observemos que

$$\frac{9}{4}\pi = \frac{8+1}{4}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Lo que implica que

$$\cos\left(\frac{9}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \sin\left(\frac{9}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

debido a que el seno y el coseno son funciones $2\pi-$periódicas.

Luego la forma polar de z es

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Mientras que la forma binómica esta dada por

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}i.$$

Comentario 3.7.6.

Si nos dan

$$z = r\left(\cos\left(\beta\right) + i\sin\left(\beta\right)\right)$$

con $r > 0$ entonces

$$|z| = r \quad \text{y} \quad \arg(z) = \beta + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

La **relación de Euler** nos dice que

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Luego, dado z es un número complejo y $\theta = \arg(z)$, utilizando la formula polar y la expresión de euler, tenemos que

$$z = |z|e^{i\theta}. \tag{3.5}$$

Esta ultima es expresión se denomina la forma exponencial de z.

Ejemplo 3.7.7. *Encontrar la forma exponencial para*

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{9}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{9}{4}\pi\right)\right).$$

Solución. En el ejemplo anterior vimos que $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$. Entonces la forma exponencial de z es

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Observación 3.7.8.

Sean z y w dos números complejos. Entonces $z = w$ si y solo si

- $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ e $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$ forma binómica;
- $|z| = |w|$ y $\arg(z) = \arg(w)$ forma polar y exponencial.

Ejemplo 3.7.9. *Sean*

$$\begin{aligned} z &= 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}; \\ w &= 3i = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3e^{i\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Entonces usando la formula binómica tenemos que

$$zw = -3 + 3i.$$

$$\begin{aligned} zw &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right. \\ &\qquad \left. + i\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right\}. \end{aligned}$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \cos(\alpha + \beta), \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) &= \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} zw &= 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right). \end{aligned}$$

De esto podemos de deducir que

$$zw = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}.$$

Teorema 3.7.10.

Dados z_1 y z_2 dos números complejos. Si

$$z_1 = |z_1|\left(\cos(\alpha_1) + i\sin(\alpha_1)\right),$$
$$z_2 = |z_2|\left(\cos(\alpha_2) + i\sin(\alpha_2)\right),$$

con α_1 y α_2 dos números reales, entonces

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)\right).$$

El teorema anterior se expresa en forma exponencial de la siguiente manera: Si $z_1 = |z_1|e^{i\alpha_1}$ y $z_2 = |z_2|e^{i\alpha_2}$ entonces

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Ejemplo 3.7.11. *Sea* $z = \sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}$ *y* $w = e^{i\frac{1}{2}\pi}$ *entonces*

$$zw = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{2}\right)\pi} = \sqrt{2}e^{i\frac{9}{4}\pi}.$$

Recordemos que $\frac{9}{4}\pi = 2\pi + \frac{1}{4}\pi$, *entonces* $arg(z) = \frac{1}{4}\pi$.

Propiedad 3.7.12.

Sean z, y w dos números complejos no nulos. Entonces

$$\arg(zw) = \arg z + \arg(w) + 2k\pi$$

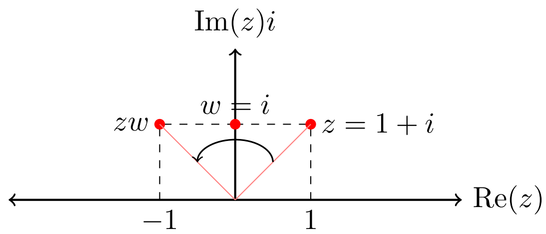
con $k = 0$ o -1.

Ejemplo 3.7.13. *Sean*

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$w = i = \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right).$$

Entonces

$$zw = \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right) = i - 1.$$



Lo que podemos de deducir mirando el gráfico es que wz es una rotación en sentido antihorario de z de ángulo $\frac{\pi}{2}$.

Comentario 3.7.14.

Sean z y w dos números complejos no nulos.

- Si $|w| = 1$ entonces zw es una rotación de en sentido antihorario de z de ángulo $\arg(w)$;
- Si $|w| \neq 1$ entonces zw es una rotación de en sentido antihorario de z de ángulo $\arg(w)$ y además es una dilatación o contracción.

A continuación en listamos una serie de propiedades que se deducen de manera sencilla de lo visto hasta el momento.

Propiedad 3.7.15.

Sean z y w dos números complejos. Entonces

(I) $z^n = |z|^n e^{i\arg(z)n}$;

(II) $\bar{z} = |z|e^{-i\arg(z)}$;

(III) Si $z \neq 0$ entonces
$$z^{-1} = \frac{e^{-i\arg(z)}}{|z|};$$

(IV) Si $w \neq 0$ entonces
$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\arg(z)-\arg(w))}.$$

Ejemplo 3.7.16. *Supongamos que $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Entonces*

$$\begin{aligned}
z^{10} &= (1+i)^{10} \\
&= \sqrt{2}^{10} e^{i\frac{\pi}{4}10} \\
&= 32e^{i\frac{5}{2}\pi} \\
&= 32\left(\cos\left(\frac{5}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right)\right) \\
&= 32i,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} z^5\bar{z}^7 &= (1+i)^5(1-i)^7 \\ &= \sqrt{2}^5 e^{i\frac{\pi}{4}5}\sqrt{2}^7 e^{-i\frac{\pi}{4}7} \\ &= 2^6 e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ &= 64\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= -64i, \end{aligned}$$

Ejemplo 3.7.17. *Resolver $z^3 = 1$ en los complejos.*

Solución. Buscamos un número complejo $z = |z|e^{i\arg(z)}$ tal que

$$1 = z^3 = |z|^3 e^{i3\arg(z)} = |z|^3\left(\cos(3\arg(z)) + i\sin(3\arg(z))\right)$$

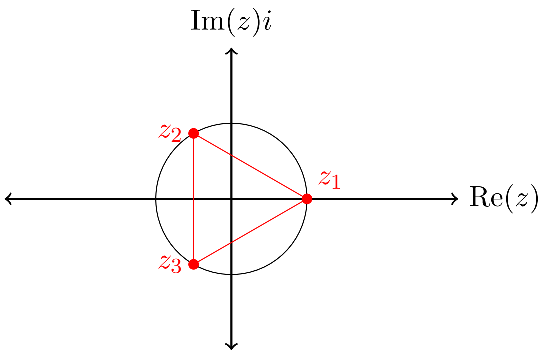
entonces

$$\begin{aligned} |z|^3 &= 1, \\ \cos(3\arg(z)) &= 1, \\ \sin(3\arg(z)) &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $|z| = 1$ y

$$\begin{cases} 3\arg(z) = 0 \to \arg(z) = 0, \\ 3\arg(z) = 2\pi \to \arg(z) = \frac{2}{3}\pi, \\ 3\arg(z) = 4\pi \to \arg(z) = \frac{4}{3}\pi, \\ 3\arg(z) = 6\pi \to \arg(z) = 2\pi, \text{ no me sirve, paro!} \end{cases}$$

Entonces las soluciones de nuestra ecuación son $z_1 = 1$, $z_2 = e^{i\frac{2}{3}\pi}$, y $z_3 = e^{i\frac{4}{3}\pi}$.



Es un triángulo inscripto en la circunferencia de radio 1 con vértice 1.

Ejemplo 3.7.18. *Resolver $z^3 = 8i$ en los complejos.*

Solución. Buscamos un número complejo $z = |z|e^{i\arg(z)}$ tal que

$$8i = z^3 = |z|^3 e^{i3\arg(z)} = |z|^3 \left(\cos(3\arg(z)) + i\sin(3\arg(z))\right)$$

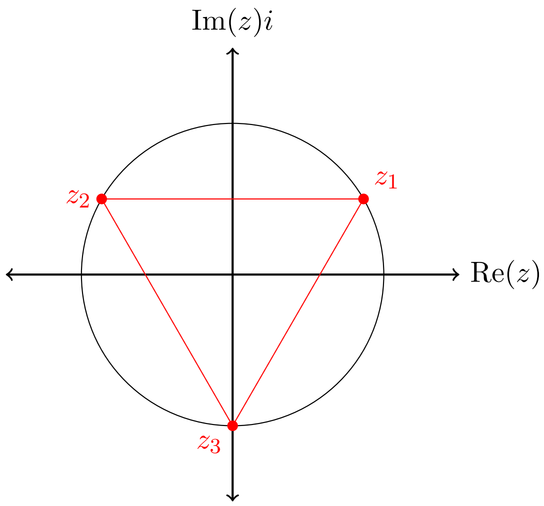
entonces

$$\begin{aligned} |z|^3 &= 8, \\ \cos(3\arg(z)) &= 0, \\ \sin(3\arg(z)) &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto $|z| = 2$ y

$$\begin{cases} 3\arg(z) = \frac{\pi}{2} \to \arg(z) = \frac{\pi}{6}, \\ 3\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2\pi \to \arg(z) = \frac{5}{6}\pi, \\ 3\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 4\pi \to \arg(z) = \frac{9}{6}\pi == \frac{3}{2}\pi, \\ 3\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 6\pi \to \arg(z) = \frac{1}{3}6\pi, \text{ no me sirve, paro!} \end{cases}$$

Entonces las soluciones de nuestra ecuación son $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 2e^{i\frac{5}{6}\pi}$, y $z_3 = 2e^{i\frac{3}{2}\pi}$.



3.8 Aplicación

Como vimos al principio de esta sección la definición de los números complejos nace de la necesidad de hallar las raíces del siguiente polinomio

$$x^2 + 1.$$

Como vimos las raíces de este polinomio son

$$i \textbf{ y } -i.$$

Si $a > 0$, ¿Cuáles son las raíces de $x^2 + a$?

$$x^2 + a = 0 \Longleftrightarrow x^2 = -a = ai^2 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{a}i.$$

¿Podremos hallar las raíces de $p(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$?
Sabemos que si $b^2 - 4ac \geq 0$ entonces p tiene dos raíces reales

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Pero sabemos que no tiene raíces reales si $b^2 - 4ac \leq 0$. En este caso podemos observar que

$$b^2 - 4ac = (4ac - b^2)i^2.$$

Entonces cuando $b^2 - 4ac \leq 0$, p tiene las siguientes raíces

$$\frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

En realidad tenemos un resultado más general que se conoce con el nombre de teorema fundamental del álgebra:

Todo polinomio en una variable de grado mayor o igual que 1 *con coeficientes reales o complejos tiene por lo menos una raíz (real o compleja)*

Ejemplo 3.8.1. *Hallar las raíces del siguiente polinomio* $p(x) = x^2 + x + 1$.

Solución. En este caso tenemos que $a = b = c = 1$, entonces $b^2 - 4ac = -3$, de lo que se deduce que p no tiene raíces reales. Mostremos que las raíces complejas de p son

$$\frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Comencemos por ver que $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ es raíz:

$$\begin{aligned} p\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) + 1 \\ &= \left(\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 0\checkmark \end{aligned}$$

Para finalizar veamos que sucede con $w = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Notemos que $w = \overline{z}$. Entonces

$$p(w) = p(\overline{z}) = \overline{z}^2 + \overline{z} + 1 = \overline{z^2} + \overline{z} + 1 = \overline{z^2 + z + 1} = \overline{p(z)} = 0\checkmark$$