# Análisis Complejo

Primer Cuatrimestre 2026

Práctica 0

Números Complejos. Esfera de Riemann. Homografías.

## Números complejos

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$ con $a$ y $b$ en $\mathbb{R}$:

   *a*) $(i+1)(i-1)(i+3)$,
   *b*) $\dfrac{2+i}{2-i}$,
   *c*) $(1+i)^{65} + (1-i)^{65}$,
   *d*) $\dfrac{1+i}{i}$,
   *e*) $(1+i)^{100}$,
   *f*) $\dfrac{1}{-1+3i}$.

2. Para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ se define
   $$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$
   probar que

   *a*) $|zw| = |z|\,|w|$,
   *b*) $|z+w| \leq |z| + |w|$,
   *c*) $|z-w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

3. Probar que
   $$\mathrm{Im}(\frac{az+b}{cz+d}) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} \quad \text{para todos} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad ad - bc = 1.$$

4. Describir geométricamente los siguientes subconjuntos:

   *a*) $|z - i + 3| = 5$,
   *b*) $|z - i + 3| \leq 5$,
   *c*) $\mathrm{Re}(2z + 3) \geq 0$,
   *d*) $\mathrm{Re}((1 + 2i)z) \geq 0$.

5. Probar que
   $$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$
   y usar esto para demostrar que en todo paralelogramo la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales.

6. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raiz cubica primitiva de la unidad, demostrar que $z_1, z_2$ y $z_3$ son los vértices de un triángulo equilátero si y sólo si
   $$(z_1 + w \cdot z_2 + w^2 \cdot z_3)(z_1 + w^2 \cdot z_2 + w \cdot z_3) = 0$$
   y usar esto para demostrar que en todo triángulo, si sobre cada uno de sus lados se construyen triángulos equiláteros exteriores entonces sus centros forman un triángulo equilátero.

7. Probar que la función $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $d(z, w) = |z - w|$ es una métrica y que ésta hace del plano complejo un espacio métrico completo y separable.

**Sucesiones de números complejos**

8. Considerar en $\mathbb{C}$ la topología usual.
   *a*) Probar que $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C}$ si y sólo si
   $$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z) \ \text{ y } \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z).$$
   *b*) Probar que si $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ entonces $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$.
9. Calcular, en caso de que existan, los límites de las siguientes sucesiones:
   *a*) $\frac{1}{n}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$, *b*) $\cos(n\pi) + i \cdot \frac{\mathrm{sen}(2n)}{n}$, *c*) $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n$
10. Se define el *conjunto de Mandelbrot* como el conjunto $\mathcal{M}$ de los números complejos $c$ tales que la sucesión definida de manera recursiva del siguiente modo:
   $$z_0 = c, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c,$$
   resulta acotada. Demostrar que todo elemento de $\mathcal{M}$ tiene módulo $\leq 2$.
   Nota: El Mandelbrot es conexo pero es un problema abierto demostrar que es arcoconexo.

**Funciones exponencial, seno y coseno**

11. Para $z \in \mathbb{C}$ se define la *exponencial* como
   $$e^z = e^a(\cos b + i \,\mathrm{sen}\, b) \ \text{ donde } \ z = a + bi,$$
   probar que $e^{w+z} = e^w e^z$ y que $e^z = e^w$ si y solo si $z - w$ es un múltiplo entero de $2\pi i$.
12. Para $z \in \mathbb{C}$ se definen el *seno* y el *coseno* como
   $$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$
   probar que
   $$\cos^2(z) + \mathrm{sen}^2(z) = 1.$$
   y que ambas son funciones sobreyectivas, tienen período $2\pi$ y sus unicos ceros son reales.
13. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\cos(z) \in \mathbb{R}$ y hacer lo mismo para $\mathrm{sen}(z)$.
14. Probar que si $z = a + bi$ y $z' = a + b'i$ con $|b| < |b'|$ entonces $|\cos(z)| < |\cos(z')|$.
15. Para $z \in \mathbb{C}$ se definen el *coseno hiperbólico* y el *seno hiperbólico* como
   $$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \mathrm{senh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$
   probar que
   $$\cosh^2(z) - \mathrm{senh}^2(z) = 1$$
   y decidir si cada una de ellas son funciones periodicas o sobreyectivas.

**Forma polar y raíces $n$-ésimas**

16. Escribir los siguientes números complejos en forma polar:

   *a*) $1+i$, *b*) $-5i$, *c*) $-3$.

17. Calcular las siguientes raíces:

   *a*) $(-1+i)^{1/3}$, *c*) $i^{2/3}$, *e*) $(-2\sqrt{3}-2i)^{1/4}$,
   *b*) $(\sqrt{3}+3i)^{1/2}$, *d*) $64^{1/6}$, *f*) $(-4+4i)^{1/5}$.

18. Si $\alpha \in \mathbb{C}^{\times}$, demostrar que hay $n$ números complejos distintos tales que $z^n = \alpha$.

**La esfera de Riemann**

19. Se define *la esfera de Riemann* $\widehat{\mathbb{C}}$ como $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y la *proyección estereográfica* como la función continua
$$\psi : S^2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\} \to \widehat{\mathbb{C}}$$
dada por
$$\psi(x,y,z)) = \frac{x_1 + ix_2}{1-x_3} \quad \text{si} \quad (x,y,z) \neq (0,0,1) \quad \text{y} \quad \psi(0,0,1) = \infty.$$
Interpertar la función anterior geometricamente, probar que es biyectiva y que su inversa está dada por
$$\varphi(z) = \frac{1}{1+|z|^2}\left(2\operatorname{Re}(z), 2\operatorname{Im}(z), |z|^2-1\right).$$

20. Consideremos $\widehat{\mathbb{C}}$ con la distancia inducida vía $\varphi$ por la distancia usual en la esfera $S^2$, mas precisamente definimos
$$\overline{d}(z,z') = \|\varphi(z) - \varphi(z')\| \quad \text{para todos} \quad z \;\text{ y }\; z' \;\text{ en }\; \widehat{\mathbb{C}}.$$
Probar que se tiene
$$\overline{d}(z,w) = \frac{2|w-z|}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|w|^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{y} \quad \overline{d}(z,\infty) = \frac{2}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}}$$
y que esto define una metrica en la esfera de Riemann, que es un espacio metrico compacto y que en el subespacio $\mathbb{C}$ da una metrica equivalente a la usual.

21. Una circunferencia en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ es por definición, la clausura de una recta o circunferencia del subespacio $\mathbb{C}$, dependiendo si pasa o no pasa por el punto $\infty$.

   Probar que $\psi$ y su inversa $\varphi$ mandan circunferencias en circunferencias.

**Homografías**

22. Una homografía $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es una función del tipo

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{con} \quad ad - bc \neq 0,$$

probar que forman un grupo bajo la composición y que además todos sus elementos tienen la propiedad que transforman circunferencias en circunferencias.

23. Probar que dados cualesquiera tres puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$, hay una única homografía que los manda a cualesquiera otros tres puntos dados con un orden dado.

24. Dados $z_1, z_2, z_3, z_4$ puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, definimos su *razón doble* $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ como

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}.$$

Probar que las homografías preservan razón doble y que cuatro puntos están contenidos en una circunferencia de la esfera de Riemann si y sólo si su razón doble es real.

25. Hallar la homografía que transforme a $0, i, -i$ en $0, 1, \infty$ y calcular la imágen de $\{z : |z| = 1\}$.

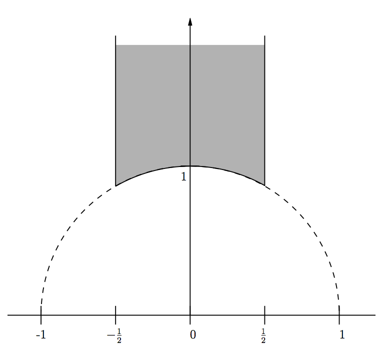
26. Consideremos dos homografías representadas por matrices $A$ y $B$ en $GL_2(\mathbb{C})$.

    *a*) ¿Qué homografía representa la matriz $AB$?
    *b*) ¿Qué homografías representan las matrices diagonales?
    *c*) ¿Cuando dos matrices distintas representan la misma homografía?

27. Probar que si una homografía manda $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, se puede representar por una matriz en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

28. Una homografía se dice modular si se puede representar por una matriz de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, probar que toda homografía modular se puede obtener componiendo tantas veces como sea necesarias la homografía traslación $z \mapsto z + 1$ y la homografía inversión $z \mapsto -1/z$.

29. Probar que para todo punto en el semiplano superior hay una homografía modular que lo lleva a la figura sombreada. ¿Es única?




30. Para cada $\alpha \in \{z : |z| \neq 1|\}$ se define el factor de Blaschke

$$T_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z},$$

probar que la circunferencia $\{z : |z| = 1\}$ va a parar a sí misma pero intercambia 0 con $\alpha$.