

Álgebra II
Primer cuatrimestre - 2026
Práctica 7
Módulos - Segunda Parte

Anillos y módulos noetherianos

- 1.1** (Anillos de matrices). Sea $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que un anillo A es noetheriano a izquierda si y solo si $M_n(A)$ es noetheriano a izquierda.
- 1.2** (Extensiones finitas de anillos). Sea B un subanillo de un anillo A tal que A es finitamente generado como B -módulo a izquierda. Pruebe que si B es noetheriano a izquierda, entonces A es noetheriano a izquierda.
- 1.3.** Sea A un anillo y M un A -módulo noetheriano a izquierda. Pruebe que un epimorfismo A -lineal $f: M \rightarrow M$ es un isomorfismo.
- 1.4.** Pruebe que un k -espacio vectorial V es noetheriano si y solo si $\dim_k V < \infty$.

Módulos libres y finitamente generados

- 2.1.** Sean A un anillo y G un grupo. Pruebe que $A[X]$ y $A[G]$ son A -módulos libres.
- 2.2.** Sea A un anillo conmutativo.
- (I) Pruebe que cualquier subconjunto $\{a_1, a_2\} \subseteq A$ es linealmente dependiente. Concluya que si un ideal no nulo $I \subseteq A$ es un A -módulo libre, entonces $I \cong A$ como A -módulo e I es un ideal principal.
- (II) Sea $A = \mathbb{Z}[X]$. Pruebe que $I = \langle 2, X \rangle$ no es un A -módulo libre.
- 2.3.** Sea A un dominio íntegro y sean $v_1, \dots, v_n \in A^n$. Sea $M \in M_n(A)$ la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \dots, v_n$. Pruebe las siguientes afirmaciones:
- (I) El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si y solo si $\det M \neq 0$.
- (II) El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un sistema de generadores si y solo si $\det M$ es una unidad.

Producto tensorial

- 3.1.** Pruebe que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.
- 3.2.** Sean A un anillo y M_A y ${}_A N$ A -módulos. Muestre que $M \otimes_A N$ es un $\text{End}_A(M)$ - $\text{End}_A(N)$ -bimódulo.
- 3.3.** Sean A y B anillos y $M_A, {}_A N_B$ y ${}_B P$ módulos. Muestre que hay un isomorfismo natural
- $$M \otimes_A (N \otimes_B P) \cong (M \otimes_A N) \otimes_B P.$$
- 3.4.** Sean A un anillo conmutativo, $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal y M un A -módulo. Muestre que hay un isomorfismo natural $A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$.

3.5 (Extensión de escalares). Sea $\varphi: A \rightarrow B$ un morfismo de anillos. Consideremos a φ^*B como A -módulo a izquierda via la construcción de restricción de escalares (Ejercicio 5 de la práctica 6).

- (I) Pruebe que si N es un A -módulo a derecha libre (resp. finitamente generado) entonces $N \otimes_A \varphi^*B$ lo es como B -módulo a derecha.
- (II) Pruebe que para cada A -módulo a derecha N y B -módulo a derecha M se tiene un isomorfismo de grupos abelianos

$$\text{hom}_B(N \otimes_A \varphi^*B, M) \cong \text{hom}_A(N, \varphi^*M).$$

3.6. Sean A un anillo, M_A y ${}_A N$ módulos y supongamos que $M = \sum_{i \in I} M_i$ es suma de una familia de submódulos $\{M_i\}_{i \in I}$. Pruebe que si $M_i \otimes_A N = 0$ para todo $i \in I$, entonces $M \otimes_A N = 0$.

3.7. Sea $(N_i)_{i \in I}$ una familia de A -módulos a izquierda y M un módulo a derecha. Pruebe que

$$M \otimes_A \bigoplus_{i \in I} N_i \cong \bigoplus_{i \in I} M \otimes_A N_i.$$

3.8 (Producto tensorial de álgebras). Sea k un cuerpo y sean A y B k -álgebras. Muestre que $A \otimes_k B$ es un álgebra de forma tal que el producto está dado por

$$a \otimes b \cdot a' \otimes b = (aa') \otimes (bb').$$

3.9. Sean k un cuerpo, A una k -álgebra y $n, m \in \mathbb{N}$. Muestre que hay isomorfismos naturales de álgebras:

- (I) $A[X] \cong k[X] \otimes_k A$;
- (II) $M_n(A) \cong M_n(k) \otimes_k A$;
- (III) $M_{nm}(A) \cong M_n(A) \otimes_k M_m(A)$.

Torsión, divisibilidad y módulos sobre un DIP

4.1. Clasifique a menos de isomorfismo los grupos abelianos de orden 18, 45, 100 y 180.

4.2. Sean A un dominio de ideales principales y M un A -módulo finitamente generado. Muestre que M es de torsión si y solo si $\text{hom}_A(M, A) = 0$.

4.3. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Encuentre todos los grupos abelianos de orden p^3 y p^4 .

4.4. Sean G un grupo abeliano finito y $p \in \mathbb{N}$ un número primo que divide al orden de G . Pruebe que el número de elementos de orden p de G es coprimo con p .

4.5. Halle los factores invariantes de los siguientes grupos abelianos:

- (I) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$;
- (II) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$;
- (III) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/49\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$;
- (IV) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/21\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

4.6. Halle los factores invariantes de un grupo abeliano G de orden 36 que tiene exactamente dos elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.

4.7. Sean $A = \mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle^2$ y $J = \langle x^2 + 1 \rangle \leq A$. Pruebe que todo A -módulo finitamente generado es isomorfo a $A^m \oplus (A/J)^n$ para un único par de enteros no negativos (m, n) .

Módulos proyectivos

Esta sección es optativa: no será incluida en los temas de parcial. Sin embargo, consideramos importante que esté presente.

5.1 (Proyectivos). Decimos que un A -módulo P es *proyectivo* si $\text{Hom}_A(P, -)$ envía sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas cortas. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

(I) P es proyectivo.

(II) Para cada epimorfismo $p: M \rightarrow N$ y morfismo $f: P \rightarrow N$, el diagrama de flechas sólidas

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ & \downarrow p & \\ P & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

puede completarse con una flecha punteada —no necesariamente única— de forma que siga siendo conmutativo.

(III) Existen un conjunto I y un A -módulo Q tal que $P \oplus Q \cong A^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} A$.

(IV) toda sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

se parte, es decir, es tal que g admite una sección.

5.2. Pruebe que si P y Q son dos A -módulos proyectivos entonces $P \oplus Q$ es un módulo proyectivo.

5.3. Sea P un A -módulo finitamente generado. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

(I) P es proyectivo;

(II) Existen $n \in \mathbb{N}$ y Q un A -módulo tal que $P \oplus Q \cong A^n$;

(III) Existe $n \in \mathbb{N}$ y $p: A^n \rightarrow A^n$ un proyector tal que $P = \text{im}(p)$.