

Álgebra II
Primer cuatrimestre - 2026
Práctica 6
Módulos – Primera parte

1. Sean A un anillo, $n \geq 1$ y $M \in A^{m \times n}$. Pruebe que la multiplicación matricial da un morfismo de A -módulos (a derecha)

$$f : x \in A^n \mapsto M \cdot x \in A^m.$$

2. Sean N y M dos Q -espacios vectoriales. Pruebe que una función $f : N \rightarrow M$ es un morfismo de Q -espacios vectoriales si y solo si es un morfismo de grupos abelianos.

3. Sean A un anillo y N, M dos A -módulos.

(I) Pruebe que $\text{Hom}_A(M, N)$ es un grupo abeliano con suma dada por

$$(f + g)(m) := f(m) + g(m), \quad (\forall f, g \in \text{Hom}_A(M, N), m \in M).$$

(II) Sea $Z(A)$ el centro de A . Definimos una operación

$$Z(A) \times \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N)$$

poniendo

$$(a \cdot f)(m) = f(am), \quad (\forall f \in \text{Hom}_A(M, N), a \in Z(A), m \in M).$$

Pruebe que esto hace de $\text{Hom}_A(M, N)$ un $Z(A)$ -módulo.

(III) Pruebe que para todo A -módulo M hay un isomorfismo de $Z(A)$ -módulos $\text{Hom}_A(A, M) \rightarrow M$ dado por la evaluación en 1.

4. Sean A, B y C anillos y sean M un (B, A) -bimódulo y N un (C, A) -bimódulo.

(I) Pruebe que el grupo abeliano $\text{Hom}_A(M, N)$ posee una única estructura de (C, B) -bimódulo tal que

$$(c \cdot f \cdot b)(m) = cf(bm), \quad \forall b \in B, c \in C, m \in M.$$

(II) Sea S un A -módulo a izquierda. Considerando a A como (A, A) -bimódulo, pruebe que hay un isomorfismo de A -módulos a izquierda $\text{Hom}_A(A, S) \cong S$.

5 (Restricción de escalares). Sea $\phi : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos.

(I) Pruebe que si definimos un producto $A \times B \rightarrow B$ poniendo

$$a \cdot b = \phi(a)b$$

dotamos a B de una estructura de A -módulo a izquierda. De forma similar podemos obtener una estructura de A -módulo a derecha y de A -bimódulo sobre B .

(II) Sea M un B -módulo a izquierda. Pruebe que el producto $A \times M \rightarrow M$ dado por $a \cdot m = \phi(a)m$ hace de M un A -módulo a izquierda. Lo denotamos $\phi^*(M)$.

(III) Si $f : M \rightarrow N$ es un morfismo de B -módulos a izquierda, pruebe que $f : \phi^*(M) \rightarrow \phi^*(N)$ es un morfismo de A -módulos a izquierda. Lo denotamos $\phi^*(f)$.

(IV) Si M y N son B -módulos a izquierda, pruebe que la aplicación

$$\phi^* : f \in \text{Hom}_B(M, N) \mapsto \phi^*(f) \in \text{Hom}_A(\phi^*(M), \phi^*(N))$$

es un morfismo de grupos abelianos.

(V) Si M , N y P son B -módulos a izquierda y $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ son morfismos de B -módulos, pruebe que

$$\phi^*(g \circ f) = \phi^*(g) \circ \phi^*(f).$$

En particular, la aplicación $\phi^* : \text{End}_B(M) \rightarrow \text{End}_A(\phi^*(M))$ es un morfismo de anillos.

6. Sean A un anillo, M un A -módulo a derecha y $B = \text{End}_A(M)$ el anillo de endomorfismos de M . Pruebe que M es un B -módulo a izquierda y que con esa estructura resulta de hecho un (B, A) -bimódulo.

7 (Los funtores Hom). Sea A un anillo.

(I) Sea $f : M \rightarrow M'$ un morfismo de A -módulos a izquierda. Para cada A -módulo a izquierda P definimos aplicaciones

$$f_P^* : h \in \text{Hom}_A(M', P) \mapsto h \circ f \in \text{Hom}_A(M, P)$$

y

$$f_*^P : h \in \text{Hom}_A(P, M) \mapsto f \circ h \in \text{Hom}_A(P, M').$$

Pruebe que f_P^* y f_*^P son morfismos de grupos abelianos.

(II) Sean $f : M \rightarrow M'$ y $g : M' \rightarrow M''$ morfismos de A -módulos. Pruebe que para cada A -módulo a izquierda P vale que

$$f_P^* \circ g_P^* = (g \circ f)_P^*$$

y

$$g_*^P \circ f_*^P = (g \circ f)_*^P.$$

(III) Pruebe que una sucesión de A -módulos a izquierda

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

es exacta si y solo si la sucesión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \text{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \text{Hom}_A(N, M'')$$

es exacta para todo A -módulo a izquierda N . ¿Hay un enunciado similar que involucre a los morfismos f_N^* y g_N^* ?

(IV) ¿Es cierto que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A -módulos a izquierda entonces

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \text{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \text{Hom}_A(N, M'') \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos?

8. Pruebe que un A -módulo M es simple si y solo si para todo $m \in M \setminus 0$ se tiene que $Am = M$.

9 (Lema de Schur). Sea A un anillo y $f: M \rightarrow N$ un morfismo de A -módulos. Pruebe que:

(I) Si M es simple, entonces f es o bien nula o bien inyectiva.

(II) Si N es simple, entonces f es o bien nula o bien sobreyectiva.

(III) Si M y N son simples, entonces f es o bien nula o bien un isomorfismo.

(IV) Si M es un A -módulo simple, entonces $\text{End}_A(M)$ es un anillo de división.

10. Sean k un cuerpo, V un k -espacio vectorial y $f \in \text{End}_k(V)$. Pruebe que existe una única estructura de $k[X]$ -módulo a izquierda sobre V para la cual $k \subseteq k[X]$ actúa por multiplicación escalar y

$$X \cdot v = f(v) \quad (\forall v \in V).$$

11. Pruebe que $\mathbb{Q}$ no es un $\mathbb{Z}$ -módulo libre.

12. Pruebe que un A -módulo es finitamente generado si y solo si es isomorfo a un cociente de A^n para algún $n \in \mathbb{N}$.

13. Pruebe que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A -módulos a izquierda y tanto M' como M'' son finitamente generados, entonces M es finitamente generado.

14. Sean A un anillo y M un A -módulo a izquierda finitamente generado. Dado un morfismo de A -módulos sobreyectivo $f: M \rightarrow A^n$, pruebe que $\ker f$ es finitamente generado.

15. Sean k un cuerpo y V un k -espacio vectorial de dimensión infinita. Pruebe que existe un $\text{End}_k(V)$ -módulo M no nulo tal que $M \cong M \oplus M$.

16. Sea

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{\gamma} & N & \xrightarrow{\delta} & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un diagrama conmutativo de flechas sólidas de A -módulos a izquierda en el que las filas son exactas.

(I) Pruebe la existencia de la flecha punteada que completa el diagrama preservando la conmutatividad.

(II) Pruebe que si f' y f son isomorfismos, entonces f'' es un isomorfismo.

17 ([†]Lema de los cinco). Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de A -módulos a izquierda con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_4 & & \downarrow \alpha_5 \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

Pruebe que:

(I) Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ y α_5 son isomorfismos, entonces α_3 es un isomorfismo.

(II) Si α_1 es sobreyectivo y α_2 y α_4 son inyectivos, entonces α_3 es inyectivo.

(III) Si α_5 es inyectivo y α_2 y α_4 son sobreyectivos, entonces α_3 es sobreyectivo.