

Álgebra II
Primer cuatrimestre - 2026
Práctica 4
Anillos

Definiciones y ejemplos

1.1. Pruebe que si A es un anillo en el que cada elemento no nulo tiene un inverso a izquierda, entonces A es un anillo de división.

1.2. Sean A un anillo y $a \in A$. Pruebe que si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que a^n es invertible, entonces a es invertible.

1.3 (Anillo opuesto). Sea A un anillo y $*$: $A \times A \rightarrow A$ la operación definida por

$$a * b = ba, \quad \forall a, b \in A.$$

Pruebe que $(A, +, *)$ es un anillo. Lo llamamos el *anillo opuesto de A* y lo denotamos por A^{op} .

1.4 (Endomorfismos). Sea M un grupo abeliano. Pruebe que $\text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$, el conjunto de endomorfismos de grupo de M , es un anillo con la suma habitual de funciones y la composición como producto.

1.5 (Matrices). Sean A un anillo y $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que

$$M_n(A) = \{a = (a_{ij}) \in A^{n \times n}\}$$

es un anillo con la suma y el producto usual de matrices. Pruebe que $Z(M_n(A)) = Z(A) \cdot \text{id}$. Deduzca que $M_n(A)$ es conmutativo si y solo si $n = 1$ y A es conmutativo.

1.6 (Anillos de funciones). Sean A un anillo y X un conjunto no vacío. Pruebe que

$$A^X = \{f: A \rightarrow X : f \text{ es función}\}$$

es un anillo con las operaciones definidas por:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x)g(x).\end{aligned}$$

Caracterice cuándo resulta conmutativo.

1.7 (Funciones continuas). Sean $n \in \mathbb{N}$ y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Pruebe que

$$C(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$$

es un subanillo de $\mathbb{R}^U$.

1.8 (Unidades). Sea A un anillo. El *grupo de unidades de A* es el conjunto

$$A^\times = \{a \in A \mid a \text{ es inversible}\}$$

equipado con la multiplicación de A .

- (I) Pruebe que $A^\times$ es un grupo.
- (II) Halle las unidades de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.
- (III) Sea G un grupo. Pruebe que $1 \cdot G \subseteq \mathbb{Z}[G]^\times$. Halle un ejemplo en el que no valga la igualdad.
- 1.9 (Idempotentes).** Sea A un anillo. Un elemento $e \in A$ es *idempotente* si $e^2 = e$. Pruebe que:
- (I) si $e \in A$ es idempotente, el subconjunto eAe con las operaciones de A restringidas es un anillo con unidad e . Decimos que eAe es la *esquina* de e en A .
- (II) si $e \in A$ es idempotente, entonces $1 - e$ también lo es.
- (III) si G un grupo finito y k un cuerpo en el que $|G| \neq 0$, entonces

$$e = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

es un idempotente en $k[G]$.

1.10. Pruebe que si X es un conjunto, entonces $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ es un anillo y todos sus elementos son idempotentes.

1.11 (Álgebras sobre un cuerpo). Sea k un cuerpo. Una k -álgebra es un anillo A que es además un k -espacio vectorial y satisface $(\lambda \cdot a)b = a(\lambda \cdot b) = \lambda \cdot ab$ para todo $a, b \in A$ y $\lambda \in k$. Una *subálgebra* de A es un subanillo que es a su vez un subespacio vectorial.

- (I) Pruebe que para todo $a \in A$ la aplicación $L_a : A \rightarrow A$, $L_a(x) = ax$ es una transformación lineal.
- (II) Pruebe que $k[X]$, $k[X, X^{-1}]$, $M_n(k)$, $k[G]$ y k^X son k -álgebras y que $C(U)$ es una $\mathbb{R}$ -subálgebra de $\mathbb{R}^U$ para todo abierto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Morfismos

2.1 (Característica). Muestre que, dado un anillo A , hay exactamente un morfismo de anillos $\chi_A : \mathbb{Z} \rightarrow A$. La *característica* de A es el único número $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $\ker(\chi_A) = n\mathbb{Z}$.

2.2. Muestre que para cada anillo A hay a lo sumo un morfismo de anillos $\mathbb{Q} \rightarrow A$ y que puede no haber ninguno.

2.3. Pruebe que el único morfismo de anillos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la identidad.

2.4. Sea k un cuerpo. Decida en cada caso si existe un morfismo de anillos $f : A \rightarrow B$:

- (I) $A = \mathbb{Z}[i]$ y $B = \mathbb{R}$;
- (II) $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ y $B = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$;
- (III) $A = k$ y $B = M_n(k)$;
- (IV) $A = M_n(k)$ y $B = k$.

2.5 (Álgebras de dimensión finita). Sea k un cuerpo. Un morfismo entre dos k -álgebras es un morfismo de anillos $f : A \rightarrow B$ que es además una transformación lineal. Pruebe que toda k -álgebra A de dimensión finita $n \in \mathbb{N}$ sobre k es isomorfa a una subálgebra de $M_n(k)$.

2.6. Sean A un anillo y G un grupo. Pruebe que la asignación

$$\begin{aligned}\text{hom}(\mathbb{Z}[G], A) &\rightarrow \text{hom}(G, \mathcal{U}(A)) \\ f &\mapsto f|_G\end{aligned}$$

es biyectiva.

Ideales

3.1. Sea $\mathcal{I}$ una familia de ideales a izquierda (resp. a derecha, biláteros) de un anillo A .

- (I) Muestre que $\bigcap_{I \in \mathcal{I}} I$ es un ideal a izquierda (resp. a derecha, bilátero) de A . Se trata del ideal más grande contenido en todos los ideales de $\mathcal{I}$.
- (II) Muestre que $\sum_{I \in \mathcal{I}} I$ es un ideal a izquierda (resp. a derecha, bilátero) de A . Se trata del ideal más chico que contiene a todos los ideales de $\mathcal{I}$.

3.2 (Ideales biláteros del anillo de matrices). Sea A un anillo.

- (I) Sean $I \subseteq A$ un ideal bilátero y $n \in \mathbb{N}$. Sea $M_n(I) \subseteq M_n(A)$ el subconjunto de las matrices de $M_n(A)$ que tienen todos sus coeficientes en I . Muestre que $M_n(I)$ es un ideal bilátero de $M_n(A)$.
- (II) Pruebe que si $J \subseteq M_n(A)$ es un ideal bilátero, entonces existe un ideal bilátero $I \subseteq A$ tal que $J = M_n(I)$.
- (III) Pruebe que si k es un cuerpo entonces $M_n(k)$ es simple, es decir, sus únicos ideales biláteros son 0 y $M_n(k)$.

3.3 (Ideales a izquierda del anillo de matrices). Sea k un cuerpo.

- (I) Sean $V \subseteq k^n$ un subespacio vectorial e I_V el subconjunto de $M_n(k)$ formado por todas las matrices cuyas filas pertenecen a V . Pruebe que I_V es un ideal a izquierda de $M_n(k)$.
- (II) Pruebe que todo ideal a izquierda de $M_n(k)$ es de la forma I_V para algún subespacio V de k^n .

Cocientes

4.1. Pruebe que:

- (I) $A[X]/\langle X-1 \rangle \cong A$ para todo anillo A ;
- (II) $\mathbb{Z}[D_n]/\langle r^m - 1 \rangle \cong \mathbb{Z}[D_m]$, si $m \mid n$;
- (III) $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si m y n son coprimos.
- (IV) $M_n(A)/M_n(I) \cong M_n(A/I)$ para todo anillo A e ideal bilátero I .

4.2. Sean $I \subseteq A$ un ideal bilátero e $I[X] = \{a_0 + \cdots + a_n X^n \in A[X] : n \in \mathbb{N}, a_i \in I \forall i \in \{0, \dots, n\}\}$. Pruebe que $I[X]$ es un ideal bilátero de $A[X]$ y que $A[X]/I[X] \cong (A/I)[X]$.

4.3. Sea k un cuerpo. Sean G un grupo, $H \trianglelefteq G$ un subgrupo normal, y $\pi : G \rightarrow G/H$ la proyección canónica. Muestre que π determina un morfismo sobreyectivo de anillos $k[G] \rightarrow k[G/H]$ y describa su núcleo.