Álgebra II

Primer cuatrimestre - 2026

Práctica 3

Grupos – Tercera parte

Acciones

1.1. Sean G un grupo finito, H y K dos subgrupos de G, y $X = HK$.

(I) Pruebe que la fórmula $(h, k) \cdot x = hxk^{-1}$ define una acción de $H \times K$ en X.

(II) Pruebe que la acción es transitiva y que el estabilizador del elemento neutro es isomorfo a $H \cap K$.

(III) Deduzca de lo anterior que $|H||K| = |HK||H \cap K|$.

1.2. Sea p un primo y $V = \mathbb{F}_p^2$. Consideramos el conjunto $X = V \setminus \{0\}$.

(I) Pruebe que hay una acción transitiva de $GL_2(\mathbb{F}_p)$ sobre V dada por la multiplicación de matrices $A \cdot v := Av$.

(II) Calcule el estabilizador de $(1, 0)$.

(III) Pruebe que $|\operatorname{GL}_2(\mathbb{F}_p)| = (p^2 - 1)(p^2 - p)$.

1.3. Sea G un grupo finito y H un subgrupo propio.

(I) Pruebe que la regla $g \cdot xH := gxH$ define una acción de G en G/H. Deduzca que la asignación

$$\rho\colon G \to S(G/H), \qquad \rho(g)(xH) = gxH$$

es un morfismo de grupos. Denotaremos $K := \ker(\rho)$ e $I := \operatorname{im}(\rho)$.

(II) Pruebe que $|K|$ divide a $|H|$ e $|I|$ divide a $[G : H]!$.

(III) Pruebe que si el índice de H es el menor primo que divide al orden de G, entonces $[G : K] = [G : H]$ y $H = K$. En particular, H es normal en G.

(IV) Pruebe que si G es simple, entonces $|G|$ divide a $[G : H]!$.

1.4 (Lema de Burnside). Sea G un grupo finito actuando sobre un conjunto finito X. Denotamos por $X/G = \{\mathcal{O}_x : x \in X\}$ al conjunto de órbitas de la acción y $X^g := \{x \in X : g \cdot x = x\}$ el conjunto de puntos fijos por un elemento $g \in G$.

(I) Pruebe que

$$\sum_{g \in G} |X^g| = |\{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}| = \sum_{x \in X} |G_x|.$$

(II) Pruebe que $\sum_{x \in X} \frac{1}{|\mathcal{O}_x|} = |X/G|$.

(III) Concluya que la cantidad de órbitas es igual al promedio de los puntos fijos:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

(IV) Deduzca que $|X/G| \geqslant |X|/|G|$ y la igualdad se tiene si y solo si ningún elemento (no trivial) de G tiene puntos fijos.

Producto directo y producto semidirecto

2.1. Dados G y H dos grupos, determine $Z(G \times H)$.

2.2 (Produto directo interno)**.** Sea G un grupo.

(I) Sean N y M dos subgrupos normales de G y supongamos que $N \cap M = 1$ y $G = NM$. Muestre que entonces es $G \cong N \times M$.

(II) Supongamos que G es grupo finito de orden mn con m y n coprimos. Muestre que si G posee exactamente un subgrupo N de orden n y exactamente un subgrupo M de orden m, entonces G es isomorfo al producto directo de N y M.

2.3 (Teorema chino del resto)**.** Pruebe que si m y n son números naturales coprimos, entonces $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Deduzca que si $p_1, \ldots, p_k$ son primos distintos dos a dos y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z}.$$

2.4. Pruebe que $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}_{>0} \times S^1$.

2.5. Pruebe que $\mathbb{D}_3 \cong S_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2.6. Sean $f : H \to H'$ y $g : K \to K'$ dos morfismos de grupos. Pruebe que la función $f \times g : H \times K \to H' \times K'$ definida por $(h, k) \mapsto (f(h), g(k))$ es un morfismo de grupos.

2.7. Sean H y K dos grupos y sean $S \trianglelefteq H$ y $T \trianglelefteq K$ dos subgrupos normales. Pruebe que $S \times T \trianglelefteq H \times K$ y que

$$\frac{H \times K}{S \times T} \cong (H/S) \times (K/T)\,.$$

2.8. Sean G, H y W grupos y $u : G \to W$, $v : H \to W$ dos morfismos de grupos. Pruebe que la aplicación $(u, v) : (g, h) \in G \times H \mapsto u(g)v(h) \in W$ es un morfismo de grupos si y solo si todo elemento de $u(G)$ conmuta con todo elemento de $v(H)$.

2.9 (Producto semidirecto)**.** Sean G y N dos grupos y $\theta : G \to \operatorname{Aut}(N)$ un momorfismo de grupos. Sea $K = N \times G$ y consideremos el producto en K dado por

$$(n, g) \cdot (n', g') = (n\theta(g)(n'), gg'), \qquad \forall\, (n, g), (n', g') \in K.$$

Muestre que con respecto a este producto K es un grupo, el cual llamamos *producto semidirecto (o cruzado)* de N por G con respecto a θ. Lo notamos $N \rtimes_\theta G$.

(I) Pruebe que $\iota\colon N \to N \rtimes_\theta G, n \mapsto (n, 1)$ y $\pi\colon N \rtimes_\theta G \to G, (n, g) \mapsto g$ son morfismos de grupos.

(II) Pruebe que $N \rtimes_\theta G$ es abeliano si y solo si $\theta = 1$ y tanto N como G son abelianos, en cuyo caso $N \rtimes_\theta G = N \times G$.

2.10 (Producto semidirecto interno)**.** Sea K un grupo y sean G y N subgrupos de K con N normal en K. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) $K = NG$ y $N \cap G = \{1\}$;

(II) $K = GN$ y $N \cap G = \{1\}$;

(III) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de N por uno de G;

(IV) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de G por uno de N.

(V) La composición de la inclusión $G \hookrightarrow K$ con la proyección canónica $K \twoheadrightarrow K/N$ es un isomorfismo.

(VI) Existe un morfismo $\sigma : K \to G$ que se restringe a la identidad de G y cuyo núcleo es N.

Pruebe además que, cuando estas afirmaciones valen, existen un morfismo de grupos $\theta : G \to \mathrm{Aut}(N)$ y un isomorfismo de grupos $\xi : N \rtimes_\theta G \to K$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & N \rtimes_\theta G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\xi"] & G \arrow[d, "\sim"] \\ N \arrow[r, hook] & K \arrow[r, two heads] & K/N \end{tikzcd}$$

2.11. Encuentre un morfismo $\theta\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ tal que $S_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\theta \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2.12. Encuentre un morfismo $\theta\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(A_n)$ tal que $S_n \cong A_n \rtimes_\theta \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2.13. Muestre que $\mathbb{H}$ no puede ser escrito como un producto semidirecto de forma no trivial.

2.14. Pruebe que $GL_n(k)$ es un producto semidirecto de $SL_n(k)$ y $k^\times$.

Teoremas de Sylow y clasificación de grupos finitos

3.1. Muestre que no hay grupos simples de orden 28 o 312.

3.2. Caracterice todos los grupos de orden pq con p y q dos primos distintos y probar que ninguno de ellos es simple.

3.3. Sea G un grupo de orden $p^r m$ con p primo, $r \geqslant 1$ y $p > m$. Pruebe que G no es simple.

3.4. Muestre que un grupo de orden 12 o 56 no es simple.

3.5. Caracterice los grupos de orden p^2q con p y q primos distintos y probar que ninguno de ellos es simple.

3.6. Muestre que un grupo no abeliano de orden menor que 60 no es simple.

3.7. Pruebe que todo grupo de orden $5 \cdot 7 \cdot 17$ es cíclico.

3.8. Pruebe que si todos los subgrupos de Sylow de un grupo finito G son normales, entonces G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow. Observar que en particular esto ocurre cuando G es abeliano.

3.9. Caracterice todos los grupos abelianos de orden finito y libre de cuadrados.

Presentaciones

4.1. Caracterice los siguientes grupos dados por generadores y relaciones:

(I) $\langle x \mid x \rangle$;

(II) $\langle x \mid x^n \rangle$;

(III) $\left\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \right\rangle$;

(IV) $\left\langle x, y \mid x^n, xyx^{-1}y^{-1} \right\rangle$;

(V) $\left\langle x, y \mid x^2, y^4, xyxy \right\rangle$;

(VI) $\langle x, y \mid xyxyxyxy \rangle$;

(VII) $\left\langle a, b \mid a^4, abab^{-1}, a^2b^{-2} \right\rangle$.