

Álgebra II
Primer cuatrimestre - 2026
Práctica 2
Grupos – Segunda parte

Morfismos de grupos

1.1. Muestre que para cualquier grupo G existe un isomorfismo $G \cong G^{\text{op}}$.

1.2. Sea G un grupo.

(I) Sea X un conjunto y $x_0 \in X$. Pruebe que

$$\text{ev}_{x_0} : G^X \rightarrow G, \quad \text{ev}_{x_0}(f) = f(x_0)$$

es un homomorfismo de grupos. Describa su núcleo e imagen.

(II) Pruebe que si A es un grupo abeliano, entonces $\text{hom}(G, A)$ es un subgrupo de A^G .

1.3. Sea G un grupo.

(I) Muestre que la función $\text{ev}_1 : f \in \text{hom}(\mathbb{Z}, G) \mapsto f(1) \in G$ es una biyección y que si G es abeliano entonces es un isomorfismo de grupos.

(II) Describa $\text{hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(III) Pruebe que hay un isomorfismo de grupos $\text{hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(n : m)\mathbb{Z}$.

1.4. Sea G un grupo. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) el grupo G es abeliano;

(II) la aplicación $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ es un morfismo de grupos;

(III) la aplicación $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ es un morfismo de grupos;

(IV) la aplicación $g \in G \mapsto g^2 \in G$ es un morfismo de grupos.

1.5. Sea G un grupo y $g \in G$. Muestre que $c_g : h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G$ es un automorfismo de grupos.

1.6. Muestre que la aplicación $g \in G \mapsto c_g \in \text{Aut}(G)$ es un morfismo de grupos. Describa su núcleo. Los automorfismos que están en la imagen de este morfismo se llaman *automorfismos interiores* y la imagen misma se denota $\text{Inn}(G)$. Muestre que $\text{Inn}(G)$ es un subgrupo normal de $\text{Aut}(G)$.

1.7. Sea $f : G \rightarrow H$ un morfismo de grupos.

(I) Muestre que $f([G, G]) \subseteq [H, H]$. Deduzca que si H es abeliano, entonces $[G, G] \subseteq \ker f$.

(II) ¿Es cierto en general que $f(Z(G)) \subseteq Z(H)$?

1.8. Sea G un grupo. Un subgrupo $H \subseteq G$ se dice *característico* si para cada $f \in \text{Aut}(G)$ se tiene que $f(H) \subseteq H$. Pruebe las siguientes afirmaciones:

- (I) Si $H \subseteq G$ es un subgrupo característico, entonces $f(H) = H$ para todo $f \in \text{Aut}(G)$.
- (II) Los subgrupos $Z(G)$ y $[G, G]$ de G son característicos.
- (III) Si H es un subgrupo característico de G , entonces H es normal en G .
- (IV) Si un grupo G posee un único subgrupo H de un orden dado, éste es característico.
- (V) Si H es un subgrupo característico de G y K es un subgrupo característico de H , entonces K es un subgrupo característico de G .

1.9. Sea G un grupo finito. Supongamos que existe $f \in \text{Aut}(G)$ tal que $f^2 = 1$ y tal que f no deja fijo a ningún elemento de G distinto de 1. Pruebe que para todo $g \in G$ se tiene que $f(g) = g^{-1}$, y que G es abeliano de orden impar.

Sugerencia: muestre que la aplicación $\phi : g \in G \mapsto g^{-1}f(g) \in G$ es biyectiva y pruebe que $f(g) = g^{-1}$ escribiendo a g en la forma $h^{-1}f(h)$ para algún elemento h de G .

Cocientes

2.1. Verifique que

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad \exp(t) = e^{2\pi it}$$

es un morfismo de grupos sobreyectivo con núcleo \mathbb{Z} . Concluya que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

2.2. Muestre que:

- (I) $\mathbb{C}^\times / \mathbb{R}_{>0} \cong S^1$;
- (II) $GL_n(k) / SL_n(k) \cong k^\times$ para todo cuerpo k y $n \in \mathbb{N}$;
- (III) $S^1 / G_n \cong S^1$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (IV) si $m \mid n$, entonces $G_n / G_m \cong G_{n/m}$;
- (V) si $m \mid n$, entonces $\mathbb{D}_n / \langle r^m \rangle \cong \mathbb{D}_m$.

2.3 (Subgrupos de un grupo cíclico). Sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

- (I) Pruebe que todo subgrupo de \mathbb{Z} es de la forma $d\mathbb{Z}$ para algún $d \in \mathbb{Z}$.
- (II) Pruebe que $d\mathbb{Z} \supset n\mathbb{Z}$ si y solo si $d \mid n$.
- (III) Pruebe que hay una correspondencia biyectiva entre subgrupos de \mathbb{Z} que contienen a $n\mathbb{Z}$ y divisores positivos de n .
- (IV) Pruebe que para cada $d \mid n$ existe un único subgrupo de orden d en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2.4. Sea G un grupo. Pruebe que $G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$.

2.5. Sean G un grupo y H y K dos subgrupos normales de G .

- (I) Muestre que hay un morfismo inyectivo $G/(H \cap K) \rightarrow G/H \times G/K$.
- (II) Deduzca que si G/H y G/K son abelianos y $H \cap K = 1$ entonces G es abeliano.
- (III) Pruebe que si $G = HK$, entonces el morfismo del ítem (I) es un isomorfismo.

2.6. Sea G un grupo y sean $H, K \subseteq G$ subgrupos de índice finito. Pruebe que $L = H \cap K$ también tiene índice finito.

2.7. Sean G un grupo y $H \subseteq G$ un subgrupo. Pruebe que $[G, G] \subseteq H$ si y solo si H es normal en G y G/H es abeliano. Deduzca que $[G, G]$ es el menor subgrupo por el cual se puede cocientar a G para que el cociente sea abeliano.

2.8. Sea G un grupo. Pruebe que si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.