Álgebra II

Primer cuatrimestre - 2026
Práctica 1
Grupos – Primera parte

Definiciones y ejemplos

1.1. Pruebe que los siguientes conjuntos son grupos abelianos con el producto de números complejos. Determine cuáles de ellos son cíclicos.

I) $\mathbb{G}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$;

II) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$;

III) $\mathbb{G}_{p^\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{G}_{p^n}$ donde p es un número primo.

1.2. Sean k un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Se definen:

$$GL_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A \neq 0\};$$
$$SL_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A = 1\}.$$

Pruebe que, dotados de la multiplicación usual de matrices, estos dos conjuntos resultan ser grupos. Descríbalos para $n = 1$. ¿Cuándo son abelianos?

1.3 (Grupo opuesto)**.** Sea $(G, \star)$ un grupo. El *grupo opuesto* de G es el conjunto $G^{op} = G$ con la operación $\star_{op}$ definida por:

$$\star_{op} : (g, h) \in G^{op} \times G^{op} \mapsto h \star g \in G^{op}.$$

Pruebe que $(G^{op}, \star_{op})$ es un grupo.

1.4 (Exponentes pequeños)**.** El *exponente* de un grupo G es el menor número natural e tal que para todo $g \in G$ se tiene $g^e = 1$, si es que existe algún e con esta propiedad.

I) Muestre que los grupos de exponente 2 son abelianos.

II) Pruebe que
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{F}_3) : a, b, c \in \mathbb{F}_3 \right\}$$
es un grupo no abeliano de exponente 3.

1.5. Sean G un grupo y X un conjunto. Notamos G^X el conjunto de todas las funciones de X en G, y lo dotamos de un producto $\star$ dado por $(f \star g)(x) = f(x)g(x)$ para todo $x \in X$. Pruebe que $(G^X, \star)$ es un grupo. ¿Cuándo es abeliano?

1.6 (Producto directo)**.** Sean G y H dos grupos. El *producto directo* de G y H es el conjunto $G \times H$ con la operación dada por

$$\big((g_1, h_1), (g_2, h_2)\big) \in (G \times H) \times (G \times H) \mapsto (g_1 g_2, h_1 h_2) \in G \times H.$$

Pruebe que $G \times H$ es un grupo y que es abeliano si y solo si tanto G como H son abelianos.

1.7 (Argumento de Eckmann-Hilton)**.** Sea G un conjunto y $\star : G \times G \to G$, y $\otimes : G \times G \to G$ dos operaciones binarias con elementos neutros $1_\star$ y $1_\otimes$, respectivamente. Supongamos que las dos operaciones satisfacen, para todo $a, b, c, d \in G$, la siguiente *ley de intercambio*:

$$(a \star b) \otimes (c \star d) = (a \otimes c) \star (b \otimes d).$$

(I) Demuestre que los elementos neutros $1_\star$ y $1_\otimes$ coinciden.

(II) Demuestre que las operaciones coinciden, esto es, $a \star b = a \otimes b$, para todo $a, b \in G$.

(III) Demuestre que las operaciones son asociativas y conmutativas.

(IV) Concluya que se tienen estructuras de monoide conmutativo coincidentes, es decir, $(G, \star) = (G, \otimes)$.

1.8. Sea $(G, \cdot)$ un grupo y consideremos la estructura de grupo de $G \times G$ definida en el Ejercicio 1.6. Demuestre que un grupo $(G, \cdot)$ es abeliano si y solo si su multiplicación $\cdot : G \times G \to G$ es morfismo de grupos.

Sugerencia: Utilice el argumento de Eckmann-Hilton.

1.9 ($\mathbb{F}_p$-espacios vectoriales)**.** Sean p un número primo y G un grupo abeliano de exponente p. Muestre que es posible definir una multiplicación $\cdot : \mathbb{F}_p \times G \to G$ por escalares de $\mathbb{F}_p$ de manera que $(G, +, \cdot)$ resulte un $\mathbb{F}_p$-espacio vectorial.

Subgrupos

2.1. Sean G un grupo y $H \subseteq G$ un subconjunto. Muestre que son equivalentes:

(I) H es un subgrupo de G.

(II) H es no vacío y para cada $x, y \in H$ se tiene que $xy^{-1} \in H$.

Muestre que si G es finito, estas afirmaciones son equivalentes a:

III) H es no vacío y para cada $x, y \in H$ se tiene que $xy \in H$.

Provea un contraejemplo para esta última equivalencia cuando G es infinito.

2.2. Sea $\mathbb{H}$ el conjunto de 8 elementos $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ dotado del producto dado por las siguientes ecuaciones y la regla usual de los signos:

$$\begin{gathered} i \cdot j = k, \quad j \cdot k = i, \quad k \cdot i = j, \\ j \cdot i = -k, \quad k \cdot j = -i, \quad i \cdot k = -j, \\ i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1. \end{gathered}$$

El par $(\mathbb{H}, \cdot)$ es un grupo no abeliano al que llamamos *grupo de cuaterniones*. El siguiente diagrama permite recordar la tabla de multiplicación de $\mathbb{H}$:

$$\begin{tikzcd} & i \arrow[dl, bend right] & \\ j \arrow[rr, bend right] & & k \arrow[ul, bend right] \end{tikzcd}$$

Encuentre todos los subgrupos de $\mathbb{H}$.

2.3. Sean G un grupo y H_1 y H_2 dos subgrupos de G. Pruebe que:

(I) $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G.

(II) $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G si y solo si $H_1 \subseteq H_2$ o $H_2 \subseteq H_1$.

2.4. Sea G un grupo.

(I) Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos de G. Pruebe que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo de G.

(II) Sea $X \subseteq G$ un subconjunto arbitrario. Pruebe que existe un menor subgrupo de G que contiene a X. Descríbalo en términos de los elementos de X.

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo de* G *generado por* X y se denota $\langle X \rangle$. Si $X = \{x_1, \dots, x_r\}$, escribimos $\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ en lugar de $\langle \{x_1, \dots, x_r\} \rangle$.

2.5. Pruebe que $\mathbb{Z} = \langle m, n \rangle$ si y solo si m y n son coprimos.

2.6. Sean $\alpha, \beta \in GL_2(\mathbb{Z})$ dados por

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

I) Pruebe que $\alpha^4 = \beta^3 = \mathrm{id}$.

II) Pruebe que $\alpha\beta$ tiene orden infinito.

III) Concluya que finitos elementos de orden finito pueden generar un subgrupo infinito.

2.7. Sean G un grupo y $g \in G$ un elemento de orden finito. Calcule $\mathrm{ord}(g^n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

2.8. Muestre que un grupo no trivial sin subgrupos propios es cíclico de orden primo.

2.9. Sea $G \subset \mathbb{C}^\times$ un subgrupo finito del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$. Pruebe que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G = \mathbb{G}_n$ es el grupo de las raíces n-ésimas de la unidad.

2.10 (Matrices elementales)**.** Sean $n \in \mathbb{N}$ y k un cuerpo. Dados $i, j \in \{1, \dots, n\}$, sea $\varepsilon_{ij} \in M_n(k)$ la matriz definida por

$$(\varepsilon_{ij})_{k,l} = \delta_{ik} \cdot \delta_{il} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = l, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Dados $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distintos y $\alpha \in k$, definimos la *matriz elemental*

$$E_{ij}(\alpha) := I_n + \alpha \cdot \varepsilon_{ij}.$$

Pruebe que $SL_n(k) = \big\langle E_{ij}(\alpha) : i, j \in \{1, \dots, n\}, \alpha \in k \big\rangle$.

Subgrupos normales

3.1. Sea G un grupo y sea $N \subseteq G$ un subgrupo tal que $gNg^{-1} \subseteq N$ para todo $g \in G$. Muestre que N es normal.

3.2. Sean G un grupo y $X \subseteq G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$. Pruebe que un subgrupo N de G es normal si y solo si $xNx^{-1} = N$ para todo $x \in X$. Muestre que si G es finito entonces alcanza con pedir $xNx^{-1} \subseteq N$ para todo $x \in X$.

3.3. Sea G un grupo.

I) Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos normales de G. Muestre que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo normal de G.

II) Sea $X \subseteq G$ un subconjunto arbitrario. Muestre que existe un menor subgrupo normal de G que contiene a X. Descríbalo en términos de los elementos de X.

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo normal de* G *generado por* X y se denota $\langle\langle X \rangle\rangle$. Si $X = \{x_1, \dots, x_r\}$, escribimos $\langle\langle x_1, \dots, x_r \rangle\rangle$ en lugar de $\langle\langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle\rangle$. En general, este subgrupo no coincide con el subgrupo generado por X construído en el Ejercicio 2.4.

III) Supongamos que $X \subseteq G$ es un conjunto tal que $gXg^{-1} \subseteq X$ para todo $g \in G$. Muestre que entonces el subgrupo normal generado por X coincide con el subgrupo generado por X.

3.4. Sean $G = GL_2(\mathbb{Q})$ y $H = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : n \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq G$. Verifique que H es un subgrupo de G. Sea ahora $g = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$. Muestre que $gHg^{-1} \subsetneq H$.

3.5. Sea G un grupo. Dados $A, B \subseteq G$ dos subconjuntos, definimos $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Supongamos que A y B son subgrupos de G. Pruebe que:

I) AB es un subgrupo de G si y solo si $AB = BA$.

II) $G = AB$ si y solo si $G = \langle A, B \rangle$ y $AB = BA$.

III) Si A o B son normales en G, entonces AB es un subgrupo de G.

IV) Si tanto A como B son normales en G, entonces AB es un subgrupo normal de G.

3.6. Sea G un grupo. Dados dos elementos $a, b \in G$, su *conmutador* se define como el elemento

$$[a, b] := aba^{-1}b^{-1}.$$

I) Pruebe que $ab = ba$ si y solo si $[a, b] = 1$.

II) Sea $X = \{[a, b] : a, b \in G\}$. El *conmutador* de G es el subgrupo $[G, G] := \langle X \rangle$. Pruebe que $[G, G]$ es un subgrupo normal en G.

III) Pruebe que G es abeliano si y solo si $[G, G] = 1$.

IV) Calcule $[\mathbb{H}, \mathbb{H}]$ y $[\mathbb{D}_n, \mathbb{D}_n]$.

3.7 (Conmutadores del grupo general lineal)**.** Sea $n \in \mathbb{N}$ y k un cuerpo.

I) Dados $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ distintos dos a dos y $\alpha, \beta \in k$, pruebe que $[E_{ij}(\alpha), E_{jk}(\beta)] = E_{ik}(\alpha\beta)$.

II) Concluya que si $n \geqslant 3$, entonces $[GL_n(k), GL_n(k)] = SL_n(k)$.

III) Pruebe que $[GL_2(\mathbb{F}_2), GL_2(\mathbb{F}_2)] \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y $SL_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{D}_3$.

3.8. Sea G un grupo. Su *centro* es el subgrupo

$$Z(G) = \{g \in G : gh = hg \text{ para todo } h \in G\}.$$

Un elemento de $Z(G)$ se dice *central*.

I) Muestre que $Z(G)$ es un subgrupo normal de G.

II) Sean G un grupo y $X \subseteq G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$. Muestre que

$$Z(G) = \{g \in G : gx = xg \text{ para todo } x \in X\}.$$

III) Encuentre el centro de un grupo abeliano, de $\mathbb{D}_n$ para $n \geqslant 1$, de $\mathbb{H}$, y de $GL_n(k)$ para k un cuerpo y $n \geqslant 1$.

IV) Sean G un grupo y X un conjunto. Calcule el centro de G^X.

3.9. Encuentre todos los subgrupos de $\mathbb{D}_4$ y determine cuáles de ellos son normales en $\mathbb{D}_4$.

3.10. Pruebe que todo subgrupo de $\mathbb{H}$ es normal. Concluya que $\mathbb{H} \not\cong \mathbb{D}_4$.