

Teoría de juegos / Tópicos de...

6.- Maximizar mínimos vs minimizar máximos

Juan Pablo Pinasco (jpinasco@dm.uba.ar)

Departamento de Matemática e IMAS,
FCEyN, UBA - CONICET

Hoy vamos a ver:

- Teorema minimax

Hoy vamos a ver:

- Teorema minimax
- Algunos juegos especiales

Hahn-Banach

Teorema (HB1)

Sea $\varphi : \mathbb{X} \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua. Entonces, existe $\tilde{\varphi} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$, lineal y continua, tal que

$$\|\tilde{\varphi}\|_{\mathbb{H}} = \|\varphi\|_{\mathbb{X}}.$$

Hahn-Banach

Teorema (HB1)

Sea $\varphi : \mathbb{X} \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua. Entonces, existe $\tilde{\varphi} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$, lineal y continua, tal que

$$\|\tilde{\varphi}\|_{\mathbb{H}} = \|\varphi\|_{\mathbb{X}}.$$

Teorema (HB2)

Sea A un conjunto abierto y convexo, B convexo. Entonces, existe $c \in \mathbb{R}$, $\phi \in \mathbb{X}^*$ tal que

$$\varphi(a) < c \leq \varphi(b)$$

para todo $a \in A$, $b \in B$.

Hahn-Banach

Teorema (HB1)

Sea $\varphi : \mathbb{X} \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua. Entonces, existe $\tilde{\varphi} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$, lineal y continua, tal que

$$\|\tilde{\varphi}\|_{\mathbb{H}} = \|\varphi\|_{\mathbb{X}}.$$

Teorema (HB2)

Sea A un conjunto abierto y convexo, B convexo. Entonces, existe $c \in \mathbb{R}$, $\phi \in \mathbb{X}^*$ tal que

$$\varphi(a) < c \leq \varphi(b)$$

para todo $a \in A$, $b \in B$.

Teorema (HB3)

Sea A un conjunto compacto y convexo, B convexo. Entonces, existe $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, y $\phi \in \mathbb{X}^*$ tal que

$$\varphi(a) < c - \varepsilon < c + \varepsilon < \varphi(b)$$

para todo $a \in A$, $b \in B$.

Vamos a demostrar el teorema Minimax de JvN con la ayuda de HB2, pero lo escribo en la tablet porque me llevaría un año tipear la cuenta.

Vamos a demostrar el teorema Minimax de JvN con la ayuda de HB2, pero lo escribo en la tablet porque me llevaría un año tipear la cuenta.

Recordemos que dada una matriz de pagos A , si I juega la fila i , II juega la columna j , entonces II le paga a_{ij} a I .

Vamos a demostrar el teorema Minimax de JvN con la ayuda de HB2, pero lo escribo en la tablet porque me llevaría un año tipear la cuenta.

Recordemos que dada una matriz de pagos A , si I juega la fila i , II juega la columna j , entonces II le paga a_{ij} a I .

No siempre hay una estrategia pura como solución, como movida óptima. Entonces, I juega con un vector de probabilidades $x = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta_n$, y II con $y = (q_1, \dots, q_n) \in \Delta_n$.

Vamos a demostrar el teorema Minimax de JvN con la ayuda de HB2, pero lo escribo en la tablet porque me llevaría un año tipear la cuenta.

Recordemos que dada una matriz de pagos A , si I juega la fila i , II juega la columna j , entonces II le paga a_{ij} a I .

No siempre hay una estrategia pura como solución, como movida óptima. Entonces, I juega con un vector de probabilidades $x = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta_n$, y II con $y = (q_1, \dots, q_n) \in \Delta_n$.

El pago esperado de I cuando juega x y su rival y es $\mathbb{E}(x, y, A) = x^t \cdot A \cdot y$.

Vamos a demostrar el teorema Minimax de JvN con la ayuda de HB2, pero lo escribo en la tablet porque me llevaría un año tipear la cuenta.

Recordemos que dada una matriz de pagos A , si I juega la fila i , II juega la columna j , entonces II le paga a_{ij} a I .

No siempre hay una estrategia pura como solución, como movida óptima. Entonces, I juega con un vector de probabilidades $x = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta_n$, y II con $y = (q_1, \dots, q_n) \in \Delta_n$.

El pago esperado de I cuando juega x y su rival y es $\mathbb{E}(x, y, A) = x^t \cdot A \cdot y$.

Observemos que x, y definen una probabilidad sobre los resultados a_{ij} : ocurren con probabilidad $p_i \cdot q_j$. Luego, el pago esperado es la esperanza matemática de los pagos al sortear con x e y qué estrategias se juegan.

Teorema Minimax

Teorema

Sea un juego de suma cero con matriz A . Entonces:

Teorema Minimax

Teorema

Sea un juego de suma cero con matriz A . Entonces:

- Existe $V \in \mathbb{R}$, el valor del juego.

Teorema Minimax

Teorema

Sea un juego de suma cero con matriz A . Entonces:

- Existe $V \in \mathbb{R}$, el valor del juego.
- Existe $x = (p_1, \dots, p_m) \in \Delta$, una estrategia mixta, tal que el jugador I gana en promedio al menos V sin importar qué juega el rival.

Teorema Minimax

Teorema

Sea un juego de suma cero con matriz A . Entonces:

- Existe $V \in \mathbb{R}$, el valor del juego.
- Existe $x = (p_1, \dots, p_m) \in \Delta$, una estrategia mixta, tal que el jugador I gana en promedio al menos V sin importar qué juega el rival.
- Existe $y = (q_1, \dots, q_n) \in \Delta$, una estrategia mixta, tal que el jugador II pierde en promedio como mucho V sin importar qué juega el rival.

Teorema Minimax

Teorema

Sea un juego de suma cero con matriz A . Entonces:

- Existe $V \in \mathbb{R}$, el valor del juego.
- Existe $x = (p_1, \dots, p_m) \in \Delta$, una estrategia mixta, tal que el jugador I gana en promedio al menos V sin importar qué juega el rival.
- Existe $y = (q_1, \dots, q_n) \in \Delta$, una estrategia mixta, tal que el jugador II pierde en promedio como mucho V sin importar qué juega el rival.

Estas estrategias se llaman *estrategias óptimas*, y V es el valor del juego.

Principio de indiferencia

Recordemos el principio de indiferencia, porque nos dice cómo calcular el valor V de un juego:

Teorema

Sea V el valor de un juego con matriz A , sean $x = (p_1, \dots, p_m)$, $y = (q_1, \dots, q_n)$ las estrategias óptimas. Entonces

$$x^t A e_j = \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \begin{cases} \geq V, \\ = V, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq j \leq n, \\ \text{si } q_j > 0. \end{cases}$$

$$e_i^t A y = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \begin{cases} \leq V, \\ = V, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq m, \\ \text{si } p_i > 0. \end{cases}$$

Por el Teorema Minimax, cuando I juega su estrategia óptima $x = (p_1, \dots, p_m)$ se garantiza cobrar V o más contra cualquier estrategia.

Por el Teorema Minimax, cuando I juega su estrategia óptima $x = (p_1, \dots, p_m)$ se garantiza cobrar V o más contra cualquier estrategia. En particular, contra los vectores canónicos $y = e_j$ (estrategias puras):

Por el Teorema Minimax, cuando I juega su estrategia óptima $x = (p_1, \dots, p_m)$ se garantiza cobrar V o más contra cualquier estrategia. En particular, contra los vectores canónicos $y = e_j$ (estrategias puras):

$$x^t A e_j = \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \geq V,$$

Por el Teorema Minimax, cuando I juega su estrategia óptima $x = (p_1, \dots, p_m)$ se garantiza cobrar V o más contra cualquier estrategia. En particular, contra los vectores canónicos $y = e_j$ (estrategias puras):

$$x^t A e_j = \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \geq V,$$

y de la misma forma, II se garantiza un pago máximo de V contra cualquier estrategia pura que juegue I :

Por el Teorema Minimax, cuando I juega su estrategia óptima $x = (p_1, \dots, p_m)$ se garantiza cobrar V o más contra cualquier estrategia. En particular, contra los vectores canónicos $y = e_j$ (estrategias puras):

$$x^t A e_j = \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \geq V,$$

y de la misma forma, II se garantiza un pago máximo de V contra cualquier estrategia pura que juegue I :

$$e_i^t A y = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq V.$$

Por el Teorema Minimax, cuando I juega su estrategia óptima $x = (p_1, \dots, p_m)$ se garantiza cobrar V o más contra cualquier estrategia. En particular, contra los vectores canónicos $y = e_j$ (estrategias puras):

$$x^t A e_j = \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \geq V,$$

y de la misma forma, II se garantiza un pago máximo de V contra cualquier estrategia pura que juegue I :

$$e_i^t A y = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq V.$$

Si ambos usan sus estrategias óptimas $x = (p_1, \dots, p_m)$, $y = (q_1, \dots, q_n)$, tenemos que el pago esperado es exactamente V :

Por el Teorema Minimax, cuando I juega su estrategia óptima $x = (p_1, \dots, p_m)$ se garantiza cobrar V o más contra cualquier estrategia. En particular, contra los vectores canónicos $y = e_j$ (estrategias puras):

$$x^t A e_j = \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \geq V,$$

y de la misma forma, II se garantiza un pago máximo de V contra cualquier estrategia pura que juegue I :

$$e_i^t A y = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq V.$$

Si ambos usan sus estrategias óptimas $x = (p_1, \dots, p_m)$, $y = (q_1, \dots, q_n)$, tenemos que el pago esperado es exactamente V :

$$V = \sum_{j=1}^n V q_j \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \right) q_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j$$

Por el Teorema Minimax, cuando I juega su estrategia óptima $x = (p_1, \dots, p_m)$ se garantiza cobrar V o más contra cualquier estrategia. En particular, contra los vectores canónicos $y = e_j$ (estrategias puras):

$$x^t A e_j = \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \geq V,$$

y de la misma forma, II se garantiza un pago máximo de V contra cualquier estrategia pura que juegue I :

$$e_i^t A y = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq V.$$

Si ambos usan sus estrategias óptimas $x = (p_1, \dots, p_m)$, $y = (q_1, \dots, q_n)$, tenemos que el pago esperado es exactamente V :

$$\begin{aligned} V &= \sum_{j=1}^n V q_j \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \right) q_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j = \sum_{i=1}^m p_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \right) \leq \sum_{i=1}^m p_i V = V. \end{aligned}$$

Supongamos que $x = (p_1, \dots, p_m)$, $y = (q_1, \dots, q_n)$ son las estrategias óptimas, $p_k > 0$, pero $\sum_{j=1}^n a_{kj} q_j < V$.

Supongamos que $x = (p_1, \dots, p_m)$, $y = (q_1, \dots, q_n)$ son las estrategias óptimas, $p_k > 0$, pero $\sum_{j=1}^n a_{kj} q_j < V$.

Entonces, por la cuenta de recién,

$$V = \sum_{i=1}^m p_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \right) < \sum_{i=1}^m p_i V = V,$$

absurdo!

Supongamos que $x = (p_1, \dots, p_m)$, $y = (q_1, \dots, q_n)$ son las estrategias óptimas, $p_k > 0$, pero $\sum_{j=1}^n a_{kj} q_j < V$.

Entonces, por la cuenta de recién,

$$V = \sum_{i=1}^m p_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \right) < \sum_{i=1}^m p_i V = V,$$

absurdo!

Con esto demostramos el Principio de Indiferencia.

Problema

Ejercicio

Dos duelistas están a 1 km de distancia, y caminan uno hacia el otro mientras deciden cuándo van a disparar. La probabilidad de acertar de I decrece linealmente con la distancia, mientras que la de II decrece cuadráticamente, y en ambos casos $\mathbb{P}(\text{acertar}|d = 0\text{km}) = 1$, y $\mathbb{P}_{II}(\text{acertar}|d = 1\text{km}) = 0$. Tienen una sola bala, y cuando uno dispare, el otro puede esperar y seguir acercándose hasta estar al lado.

Problema

Ejercicio

Dos duelistas están a 1 km de distancia, y caminan uno hacia el otro mientras deciden cuándo van a disparar. La probabilidad de acertar de I decrece linealmente con la distancia, mientras que la de II decrece cuadráticamente, y en ambos casos $\mathbb{P}(\text{acertar}|d = 0\text{km}) = 1$, y $\mathbb{P}_{II}(\text{acertar}|d = 1\text{km}) = 0$. Tienen una sola bala, y cuando uno dispare, el otro puede esperar y seguir acercándose hasta estar al lado.

Por un ejercicio de parcial:

- ❶ Si puede escuchar el disparo ¿A qué distancia dispararía si es I? ¿Y si es II?

Por otro ejercicio de parcial:

- ❷ ¿Y si ambos usan un silenciador (y tienen precisión lineal)?