

PRÁCTICA 0: REPASO

Ejercicio 1. Sean \mathcal{U} un conjunto universal finito y $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Probar que:

- $\#A^c = \#\mathcal{U} - \#A$.
- $\#A = \#(A \cap B) + \#(A \cap B^c)$.
- $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$. Generalizar para la unión de una cantidad finita cualquiera de conjuntos.
- $\#(A - B) = \#A - \#(A \cap B)$.

Ejercicio 2.

- Martín tiene pintura de 7 colores, va a pintar una mesa y una silla. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?
- Charly tiene que ubicar 7 pares de medias iguales en 2 cajones, uno rojo y otro azul. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?
- La nona tiene muchos caramelos, de naranja y de limón (al menos 7 de cada gusto). Quiere regalarle uno a cada uno de sus 7 nietos. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?
- Beto tiene que decidir los resultados de un concurso, en el que participan 7 personas y hay premios para el primero y el segundo. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?
- Ana tiene 7 libros distintos y tiene que elegir 2 libros para llevárselos de viaje. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

¿Cuáles son las diferencias entre los 5 enunciados? ¿Se animan a generalizarlos?

Ejercicio 3. De una caja que contiene 123 bolillas numeradas de 1 a 123 se extraen cinco bolillas. ¿Cuántos resultados posibles hay si:

- las bolillas se extraen una a la vez y se descartan después de extraerlas?
- las bolillas se extraen una a la vez y se devuelven a la caja después de extraerlas?
- las bolillas se extraen todas juntas?

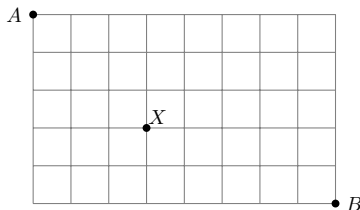
Ejercicio 4.

- ¿Cuántos anagramas de BIBLIOTECARIA pueden formarse?
- ¿Y con la condición de que la T esté a la derecha de la C?
- ¿Y con la condición de que la T esté a la derecha de la C y la C a la derecha de la R?
- ¿Y con la condición de que las dos A no estén juntas?
- ¿Y con la condición de que todas las vocales estén juntas?

Ejercicio 5. Consideremos la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 57$.

- a) ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene?
- b) ¿Cuántas soluciones enteras positivas tiene donde $x_1 \geq 50$?

Ejercicio 6. En el tablero de la figura, ¿cuántas formas hay de llegar desde A hasta B realizando movimientos hacia abajo y hacia la derecha siguiendo las líneas? ¿Cuántos de esos caminos pasan por X ?



Ejercicio 7. Se extraen 23 bolitas de una caja que contiene 100 bolitas blancas, 100 bolitas azules, 100 bolitas negras y 100 bolitas rojas. ¿Cuántos resultados posibles hay?

Ejercicio 8. Probar que

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \geq \varepsilon\} \subseteq \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Ejercicio 9. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que F tiene a lo sumo numerables puntos de discontinuidad.

Ejercicio 10. Probar, por inducción, que la derivada n -ésima de $f(x) = e^{x^2}$ es de la forma $f^{(n)}(x) = f(x) \cdot p_n(x)$, con $p_n(x)$ un polinomio de grado n .

Ejercicio 11. Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones acotadas de números reales. Enunciar y demostrar las relaciones de orden entre los siguientes cuatro números:

- $\liminf(a_n + b_n)$.
- $\limsup(a_n + b_n)$.
- $\limsup a_n + \limsup b_n$.
- $\liminf a_n + \liminf b_n$.

Ejercicio 12.

- a) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- b) Usar el ítem anterior para probar que:

- i) Si $\alpha > 0$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n/n! = 0$.
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} n!/n^n = 0$.
- iii) Si $0 < \alpha < 1$ y $k \in \mathbb{Z}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \alpha^n = 0$.

Ejercicio 13.

a) Sea $k \in \mathbb{N}$. Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n+k}{n} \frac{k!}{n^k}.$$

b) Sean $r \in (0, 1)$ y $a_n = \sum_{k=0}^n r^k$. Probar que $a_n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$ y concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := \sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

c) Sea $p \in \mathbb{R}$. Probar que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si y sólo si $p > 1$.

Ejercicio 14. Probar que las siguientes afirmaciones son **falsas**, mostrando un contraejemplo:

- “Si $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a $f(x)$ (es decir, para cada $x \in [0, 1]$ se tiene $f_n(x) \rightarrow f(x)$), entonces $f(x)$ es continua.”
- “Si $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones continuas y acotadas que converge puntualmente a una función continua $f(x)$, entonces $f(x)$ es acotada.”

Ejercicio 15.

- a) Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cada una de ellas derivable, que converge uniformemente a una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y f'_n converge uniformemente a una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que f es derivable y que $f' = g$.
- b) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie de funciones. ¿Bajo qué hipótesis es legítimo derivarla término a término?
- c) Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge uniformemente en \mathbb{R} , pero que esto no ocurre para la serie obtenida derivando término a término.
- d) Sea $p \in (0, 1)$. Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} = \frac{1}{p}$.

Ejercicio 16. Calcular

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} dx dy, \quad \int_0^{+\infty} \int_0^y e^{-y} dx dy, \quad \int_{-\infty}^t x^2 e^x dx.$$