

CLASE 19/6: REPASO

Ejercicio 1. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con $X_1 \sim Be(\frac{1}{2})$. Sea

$$Z_n := \frac{\sum_{i=2^{n+1}}^{2^{n+1}} X_i}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para $\epsilon > 0$ fijo y para cada $n \in \mathbb{N}$, se definen los eventos $A_n := \{Z_n > \frac{1}{2} + \epsilon\}$. Probar que para cualquier $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(\text{ocurre } A_n \text{ infinitas veces}) = 0.$$

Ejercicio 2. Se tiene una urna con 5 bolitas blancas, 6 verdes y 4 rojas. Se extraen 8 bolitas con reposición. Sea (X, Y, Z) el número de bolitas blancas, verdes y rojas extraídas respectivamente.

- Probar que $X|Y = m \sim Bi(8 - m, 5/9)$.
- Calcular el número esperado de bolitas blancas extraídas, sabiendo que salieron 3 verdes.
- Calcular $\mathbb{E}(X|Y)$.

Ejercicio 3. Sean $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias positivas i.i.d. tales que $0 < \mathbb{E}(X_n) < \infty$ y $0 < \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$ e $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d. e independientes de $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tales que $\mathbb{E}(Y_n) < \infty$ y $0 < \text{Var}(Y_n) < \infty$.

- Sea $W_i = X_i Y_i - \mathbb{E}(Y_1) X_i$. Hallar $\mathbb{E}(W_i)$ y $\text{Var}(W_i)$.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$$Z_n := \sqrt{n} \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i} - \mathbb{E}(Y_1) \right).$$

Probar que

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(0, \frac{\text{Var}(Y_1) \mathbb{E}(X_1^2)}{\mathbb{E}(X_1)^2} \right).$$