Probabilidad y Estadística (M) - Probabilidad (LCD)
Examen final - Julio de 2025

Buena suerte y **justifique todas sus respuestas**.

1. Sean $1 \leq k \leq n$, $S_n \sim Binomial(n,p)$ e $Y_k \sim Binomial - negativa(k,p)$. Probar que $P(S_n \geq k) = P(Y_k \leq n)$.

2. Enunciar y demostrar las Desigualdades de Markov y Chebyshev. *Nota:* pueden utilizar las propiedades de la esperanza sin demostrarlas.

3. Enunciar y demostrar la Ley fuerte de los grandes números. *Nota:* pueden utilizar las propiedades de la varianza y la covarianza sin demostrarlas. Tampoco es necesario probar el siguiente resultado: sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de variables aleatorias y X una variable aleatoria todas en un mismo espacio de probabilidad tales que $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$ para todo $\varepsilon > 0$. Entonces $X_n \xrightarrow{c.s.} X$.

4. Consideremos un estimador insesgado tal que su varianza tiende a cero cuando el tamaño de la muestra n tiende a infinito. Probar que es consistente.

Baroness Ingrid Daubechies (1954) es una matemática y física belga. Su investigación utiliza métodos automáticos de la matemática, tecnología y biología para extraer información de muestras como huesos y dientes. Desarrolló sofisticadas técnicas de procesamiento de imágenes para establecer la autenticidad y antigüedad de famosas obras de arte, incluyendo trabajos de van Gogh y Rembrandt.
Es miembro de la Academia nacional de Ingeniería (Estados Unidos), la Academia nacional de ciencias y la Academia norteamericana de artes y ciencias. Desde el año 1992 es poseedora de la beca MacArthur y fue jurado de Los premios Infosys. Daubechies está en la junta directiva de EDGE Foundation (*Enhancing Diversity in Graduate Education*), un programa que ayuda a mujeres a estudiar matemática. Fue la primera mujer en presidir la Unión matemática internacional (2011 - 2014) y es miembro de la Academia europea desde 2015.