Definición

Sean X e Y variables aleatorias discretas definidas sobre un espacio muestral S. La **función de probabilidad conjunta** del par (X, Y) se define como

$$p_{XY}(x,y) = P(X = x, Y = y) = P(X, Y)$$

- $R_{XY} = \{(x,y)/x \in R_X, y \in R_Y\}$
- Dado $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $P((X,Y) \in A) = \sum\sum_{(x,y)\in A} p_{XY}(x,y)$

1. Supongamos que tenemos una caja con 5 interruptores, dos de los cuales están defectuosos. Los probamos uno a uno, al azar y sin reemplazo. Sean

   $Y_1 =$ número de extracción donde sale el 1er defectuoso;

   $Y_2 =$ número de extracción donde sale el 2do defectuoso.

   Hallar la función de probabilidad conjunta, las marginales y las distribuciones condicionales. ¿Son independientes?

2. Supongamos que se seleccionan al azar, sin reposición, 3 bolillas de una urna que contiene 3 bolillas rojas, 4 blancas y 5 azules. Si definimos las variables X: número de bolillas rojas seleccionadas e Y: número de bolillas blancas seleccionadas, hallar la función de probabilidad conjunta de X e Y.

3. Consideremos un transmisor que envía mensajes a través de una red informática. Definamos dos variables aleatorias:

   X : el tiempo de transmisión de un mensaje dado;

   Y : la longitud del mensaje dado.

   Suponiendo que la longitud de un mensaje tiene la función de probabilidad puntual

   $$P(Y = y) = \begin{cases} 10^2 & \text{con probabilidad } 5/6 \\ 10^4 & \text{con probabilidad } 1/6 \end{cases}$$

   y que el tiempo de transmisión depende de la longitud del mensaje (Y), y de la congestión de las redes en el momento de la transmisión, de forma que

   $$X = \begin{cases} 10^{-4}Y & \text{con probabilidad } 1/2 \\ 10^{-3}Y & \text{con probabilidad } 1/3 \\ 10^{-2}Y & \text{con probabilidad } 1/6, \end{cases}$$

   hallar la función de probabilidad marginal $P(X = x)$.