

MATE IV

PRÁCTICA 3

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Funciones Complejas: $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Toda $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se puede escribir como

$$f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$$

a $\Rightarrow f$ le corresponden las funciones $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, su parte real y parte imaginaria, respectivamente.

Ejercicio 1: • Función exponencial compleja

$$f(z) = e^z := e^{x+yi} = e^x (\cos(y) + \operatorname{sen}(y)i)$$

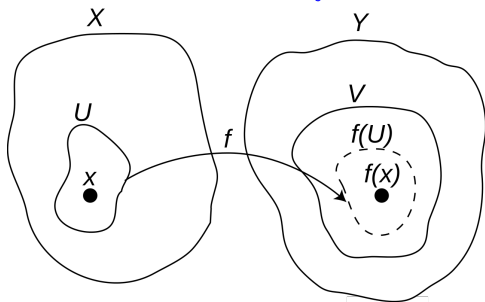
$$= \underbrace{e^x \cos(y)}_{u(x,y)} + \underbrace{e^x \operatorname{sen}(y)}_{v(x,y)}i$$

$$\bullet g(z) = z^2 = (x + yi)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + \underbrace{2xy}_{v(x,y)}i$$

Funciones Continuas

Se dice que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en $z_0 \in \Omega$ si existe el límite de f cuando z tiende a z_0 y vale $f(z_0)$:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \in \mathbb{C}$$



Es decir, f es continua en z_0 si puntos cercanos a z_0 en el dominio son llevados por f a puntos cercanos a $f(z_0)$

• $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en Ω si lo es en todo $z \in \Omega$

Teorema 1

Si $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son **continuas** en Ω entonces

- $f + g$ es **continua** en Ω
- $f \cdot g$ es **continua** en Ω
- $\frac{f}{g}$ es **continua** en $\{z \in \Omega : g(z) \neq 0\}$
- Si además f es **continua** en $U =$ la imagen de g
 $\Rightarrow f \circ g$ es **continua** en Ω

Ejercicio 2: • $f(z) = z$ es **continua** y por el Teorema 1

$\Rightarrow f(z) = z^2$ es continua $\Rightarrow f(z) = z^3$ es continua etc.

$\Rightarrow f(z) = z^n$ es continua $\forall n$

• Los polinomios $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ son continuas

FUNCIONES DERIVABLES

Funciones Derivables

Se dice que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en $z \in \Omega$ si existe el límite del cociente incremental, donde el incremento $\Delta z \in \mathbb{C}$:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \in \mathbb{C}$$

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en Ω si lo es en todo $z \in \Omega$

Ejercicio 3. a) $f(z) = z$ es derivable

- $f(z) = z$ es derivable, es decir, existe $f'(z)$ en todo $\mathbb{C}$ pues

$$\begin{aligned} f'(z) = z' &= \frac{d(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z) - z}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} 1 = 1 \quad \forall z \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ejercicio 3. b) $f(z) = z^2$ es derivable

- $f(z) = z^2$ es derivable y existe $f'(z)$ en todo $\mathbb{C}$ pues

$$\begin{aligned}(z^2)' &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} 2z + \Delta z = 2z \quad \checkmark\end{aligned}$$

Teorema 2

Si $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son derivables en Ω entonces

- $f + g$ es derivable en Ω
- $f \cdot g$ es derivable en Ω
- $\frac{f}{g}$ es derivable en $\{z \in \Omega : g(z) \neq 0\}$
- Si además f es derivable en $U =$ la imagen de g
 $\Rightarrow f \circ g$ es derivable en Ω

y **valen las fórmulas de derivación** de las operaciones:

- $f + g$ derivable con $(f + g)' = f' + g'$
- $f \cdot g$ derivable en Ω con $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $\frac{f}{g}$ derivable con $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \forall z : g(z) \neq 0$
- Regla de la Cadena: $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$ ✓

Reglas de Derivación: Comprobación

- $f + g$ derivable con $(f + g)' = f' + g'$

$$\begin{aligned}(f + g)' &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(f + g)(z + \Delta z) - (f + g)(z)}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} = f' + g' \checkmark\end{aligned}$$

- $f \cdot g$ derivable en Ω con $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$\begin{aligned}(f \cdot g)' &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(z + \Delta z) - (f \cdot g)(z)}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot g(z + \Delta z) + f(z) \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} \\&= (f' \cdot g + f \cdot g')(z) \checkmark\end{aligned}$$

Más Funciones Derivables: Ejercicio 4

- $f(z) = z^3 = z \cdot z^2$ es producto de funciones derivables en todo $\mathbb{C}$, por lo cual es derivable

$$\Rightarrow z^4, z^5, \dots z^n \text{ es derivable } \forall n$$

- Los **polinomios y las funciones racionales son derivables** en su dominio:

$$p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots a_nz^n$$

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} : \forall z : q(z) \neq 0$$

y sus derivadas se obtienen por las fórmulas usuales, en virtud del teorema 2.

Ejercicio 5: Dominio de Derivabilidad

Determinar el dominio y la región en la cual

$$f(z) = \frac{\pi z^2}{4z^3 - \frac{1}{2}} \text{ sea derivable}$$

$$\text{Sol: } \text{Dom}(f) = \Omega = \{z \in \mathbb{C} : 4z^3 - \frac{1}{2} \neq 0\} = \{z \in \mathbb{C} : z^3 \neq \frac{1}{8}\}$$

$$z^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = \frac{1}{8} & \Rightarrow |z| = \frac{1}{2} \\ 3 \arg(z) = 0 + 2k\pi & \Rightarrow \theta_k = \frac{2}{3}k\pi \Rightarrow \theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f) = \Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{1}{2}, z \neq \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{4} \right\}$$

$\Rightarrow f$ es derivable en Ω por ser cociente de derivables con denominador no nulo. ✓

Además, $\forall z \in \Omega$ se puede calcular $f'(z)$ usando las reglas de derivación de las operaciones:

$$\begin{aligned}\frac{d f}{d z}(z) &= \frac{d}{d z} \left[\frac{\pi z^2}{4z^3 - \frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{2\pi z(4z^3 - \frac{1}{2}) - \pi z^2 \cdot 12z^2}{(4z^3 - \frac{1}{2})^2} \quad \checkmark\end{aligned}$$

Teorema 3: Cauchy-Riemann

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$ entonces

f derivable en un punto $z = x + yi \iff u, v$ diferenciables en el mismo (x, y) y valen las identidades

$$u_x = v_y; \quad u_y = -v_x \text{ en } (x, y)$$

- Además, en cada z donde valen estas condiciones:

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$$

- En este caso, también $\implies f$ continua en el mismo z .

Ejercicio 6: Descartar derivabilidad

Analizar la derivabilidad de $f(z) = \bar{z}$

Solución:

$f(z) = \bar{z}$ no es derivable para ningún $z \in \mathbb{C}$

pues $f(z) = \bar{z} = x - yi$

$$u_x = 1 \neq -1 = u_y \text{ cualquiera sea } z \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ No valen las identidades de C - R en ningún $z \in \mathbb{C}$

Falla una de las 4 condiciones de C - R

$\Rightarrow$ No existe $f'(z)$ para ningún $z \in \mathbb{C}$

Ejercicio 7

Analizar la derivabilidad de $f(z) = e^z$

Solución: Veamos que $f(z) = e^z$ es derivable en todo $\mathbb{C}$:

$$f(z) = e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + \operatorname{sen} y i)$$

$$= \underbrace{e^x \cos y}_{=u(x,y)} + \underbrace{e^x \operatorname{sen} y}_{=v(x,y)} i$$

$$\implies u(x, y) = e^x \cos y; \quad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$$

- u y v diferenciables para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$
- $C - R$ valen pues $\begin{cases} u_x(x, y) = e^x \cos y = v_y(x, y) \\ u_y(x, y) = e^x (-\operatorname{sen} y) = -v_x(x, y) \end{cases}$
- Para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = u_x(x, y) + v_x(x, y) i = e^x \cos y + e^x \operatorname{sen} y i = e^z$$

$f(z) = e^z$ es derivable en todo $\mathbb{C}$

$f(z) = e^z$ es derivable en todo $\mathbb{C}$ y $f'(z) = e^z$ ✓

Ejercicio 8. a) Descartar derivabilidad de $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

Analizar la derivabilidad de

$$f(z) = f(x + yi) = x^3 + i(1 - y)$$

Solución: Tenemos $\begin{cases} u(x, y) = x^3 \\ v(x, y) = 1 - y \end{cases}$

Supongamos que f sea derivable en $z \in \mathbb{C}$, luego, por Cauchy - Riemann, en el mismo $z = x + yi$ debe verificarse

$$3x^2 = u_x = v_y = -1, \text{ absurdo}$$

luego esta identidad no vale para ningún $z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ no existe $f'(z) = 0$ para ningún $z \in \mathbb{C}$



Ejercicio 8. b) Analizar la derivabilidad de

$$f(z) = f(x + yi) = \ln x^3 + i(y - 1)^2$$

Solución: $\text{Dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} : x > 0\}$ = semiplano derecho.

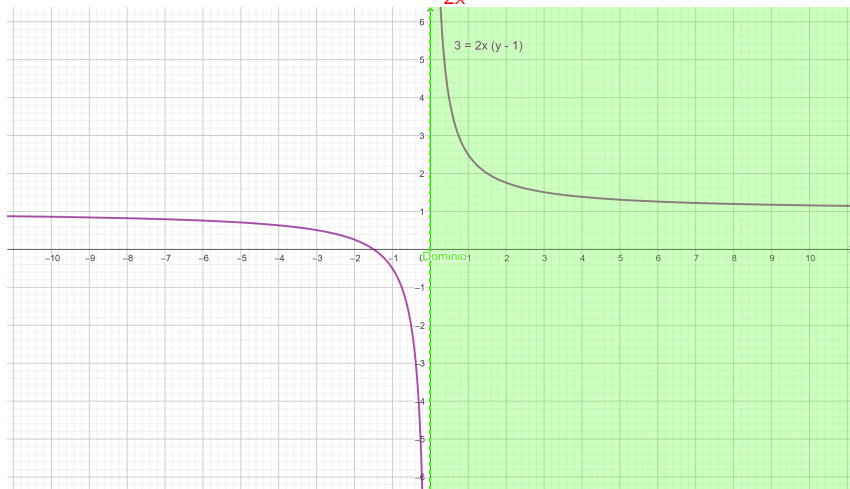
$$f = u + iv \Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = \ln x^3 \\ v(x, y) = (y - 1)^2 \end{cases} \Rightarrow u, v \text{ diferenciables en } U \quad \checkmark$$

Supongamos que f sea derivable en $z \in \mathbb{C}$, luego, por C-R, en el mismo $z = x + yi$ debe verificarse

$$\bullet \quad 0 = u_y = -v_x = 0 \Rightarrow \text{vale en } U \quad \checkmark$$

$$\bullet \quad \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x} = u_x = v_y = 2(y - 1) \Rightarrow \frac{3}{2x} = y - 1$$

Luego esta identidad vale sólo para los $z \in \mathbb{C}$ de la hipérbola y f es derivable sólo para estos $z : \frac{3}{2x} = y - 1, x > 0$



$\Rightarrow$ no existe $f'(z) = 0$ para ningún otro $z \in U$ ✓

Ejercicio 9. a)

Analizar la derivabilidad de

$$f(z) = |z|^2$$

$$f(z) = x^2 + y^2 = u(x, y) + iv(x, y) \implies \begin{cases} u(x, y) = x^2 + y^2 \\ v(x, y) = 0 \end{cases}$$

$\implies u, v$ diferenciables

Pero ¿vale Cauchy-Riemann? ¿para qué valores de z ?

$u(x, y)$ y $v(x, y)$ cumplen las identidades si sólo si

$$\begin{cases} 2x = u_x(x, y) = v_y(x, y) = 0 & \implies x = 0 \\ 2y = u_y(x, y) = -v_x(x, y) = 0 & \implies y = 0 \end{cases}$$
$$\iff (x, y) = (0, 0)$$

- $f(z) = |z|^2$ es derivable sólo en $z = 0$ y $f'(0) = 0$
- $f'(z)$ no existe en ningún otro punto de $\mathbb{C}$ ✓

Ejercicio 9. b)

Hallar los $z \in \mathbb{C}$: $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ sea derivable si los hay.

Solución:

$$|z| = u(x, y) + iv(x, y) \implies \begin{cases} u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ v(x, y) = 0 \end{cases}$$

$\implies v$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, pero $u(x, y)$ es diferenciable sólo para $(x, y) \neq (0, 0)$, donde es composición de diferenciables.

Atención: *no existen las derivadas parciales de u en $(0,0)$:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} u(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \pm 1 \text{ dependiendo de que } h \rightarrow 0^{\pm} \\ &\implies \textit{u no es diferenciable en } (0,0)\end{aligned}$$

Por Cauchy - Riemann, $f(z)$ no es derivable tampoco en $z = 0$ ✓

- Pero u sí es diferenciable para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ por ser composición de diferenciables.

- ¿Valen las identidades de Cauchy-Riemann para **algún** $(x, y) \neq (0, 0)$?

- $u(x, y)$ y $v(x, y)$ cumplen las identidades si sólo si

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = u_x(x, y) = v_y(x, y) = 0 & \implies x = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = u_y(x, y) = -v_x(x, y) = 0 & \implies y = 0 \end{cases}$$

$$\iff (x, y) = (0, 0), \text{ absurdo!}$$

$\implies f(z) = |z|$ no es derivable en ningún $z \in \mathbb{C}$ ✓

Ejercicio 10. Las identidades de C - R no son condiciones suficientes

Probar que valen las identidades de Cauchy - Riemann en $z = 0$ pero $f(z)$ no es derivable en $z = 0$:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^2}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Solución: ● f es una función partida $\Rightarrow$ analicemos $z = 0$ por definición, pero necesitamos conocer u, v cerca de $z = 0$:

● Si $z \neq 0 \Rightarrow$ usemos $z\bar{z} = |z|^2$:

$$f(z) = \frac{(\bar{z})^2}{z} = \frac{(\bar{z})^3}{z\bar{z}} = \frac{(\bar{z})^3}{|z|^2}$$

$$\text{CA: } (\bar{z})^3 = (x - yi)^3 = (x - yi)^2(x - yi)$$

$$= (x^2 - y^2 - 2xyi)(x - yi) = x^3 - 3xy^2 + i(y^3 - 3x^2y)$$

- Si $z \neq 0$: $f(z) = \frac{(\bar{z})^3}{|z|^2} = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} + i \left(\frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2} \right)$

$$= u(x, y) + i v(x, y) \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

- Veamos que se verifican $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ en $z = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^3} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(0, h) - v(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^3} = 1 \quad \checkmark$$

- Si $z \neq 0$: $f(z) = \frac{(\bar{z})^3}{|z|^2} = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} + i \left(\frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2} \right)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0,h) - u(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(h,0) - v(0,0)}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Por lo tanto, valen las identidades de Cauchy - Riemann en $z = 0$ ✓

Pero u no es diferenciable en $(0,0)$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} & \frac{u(x,y) - \overbrace{u_x(0,0)}^{=1}x - \overbrace{u_y(0,0)}^{=0}y - \overbrace{u(0,0)}^{=0}}{\|(x,y)\|} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - 3xy^2 - x(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cancel{x^3} - 3xy^2 - x(\cancel{x^2} + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

u no es diferenciable en $z = 0$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-4xy^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = L$$

Veamos usando trayectorias que el límite anterior **no existe**:

- $x = 0$:

$$L = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{|y|^3} = 0$$

- $y = x$:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x^3}{2\sqrt{2}x^2|x|} = -\sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} \text{ que no existe}$$

$\Rightarrow u$ no es diferenciable en $z = 0$

Concluimos que $f(z)$ no es derivable en $z = 0$ ✓

Ejercicio 11.

Dada $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$, encontrar una función $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

sea derivable en todo $\mathbb{C}$.

Solución: Por Cauchy-Riemann, si $f = u + iv$ es derivable en $z \in \Omega$ entonces vale

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \text{ en el mismo } z$$

Con $u = y^3 - 3x^2y$, empecemos imponiendo estas condiciones a una v desconocida, aunque sabemos que sólo son condiciones necesarias:

$$v(x, y) = \int v_y dy = \int u_x dy = \int -6xy dy = -3xy^2 + \varphi(x)$$

La 2da condición dice

$$3y^2 - 3x^2 = u_y = -v_x = +3y^2 - \varphi'(x)$$

Comparando ambos miembros obtenemos

$$-3x^2 = -\varphi'(x) \Rightarrow x^3 + C = \varphi(x)$$

Concluimos

$$v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + C$$

Por lo tanto,

$$f(z) = (u + iv) = y^3 - 3x^2y + i(-3xy^2 + x^3 + C)$$

- u, v son diferenciables por ser polinomios en $\mathbb{R}^2$



Conclusión: $f = u + iv$ es derivable

Por lo tanto, f es derivable por C-R:

$$f(z) = u(z) + iv(z) = y^3 - 3x^2y + i(-3xy^2 + x^3 + C)$$

Además,

$$z^3 = (x^2 - y^2 + 2xyi)(x + yi) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3),$$

luego, la anterior es el desarrollo en parte real $+i$ parte imaginaria de

$$f(z) = iz^3 + iC : C \in \mathbb{R}$$

la cual es derivable por ser producto de una potencia de z por una constante ✓

FUNCIONES HOLOMORFAS

Funciones holomorfas

Definición: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto; $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si f es derivable en Ω , es decir, si $f'(z)$ existe para todo $z \in \Omega$

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en un punto $z_0 \in \Omega$ si lo es en un abierto que contiene a z_0 .
- No tiene sentido hablar de f holomorfa en un punto aislado
- Sólo podemos hablar de f holomorfa en un dominio abierto

$f(z) = e^z$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$

- $f(z) = e^z$ es derivable en todo $\mathbb{C}$ y $f'(z) = e^z$

$\implies f(z) = e^z$ es HOLOMORFA en $\mathbb{C}$.

Teorema 4: Funciones holomorfas

Si $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son holomorfas en el abierto Ω entonces

- $f + g$ es holomorfa en Ω
- $f \cdot g$ es holomorfa en Ω
- $\frac{f}{g}$ es holomorfa en $\{z \in \Omega : g(z) \neq 0\}$

es decir

- $f + g$ derivable con $(f + g)' = f' + g'$ en Ω .
- $f \cdot g$ derivable en Ω con $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ en Ω .
- $\frac{f}{g}$ derivable en $\{z \in \Omega : g(z) \neq 0\}$ con
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \text{ en } \Omega.$$

Ejercicio 11

Determinar el dominio y la región en la cual

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{4z^3 - \frac{1}{2}} \text{ sea holomorfa}$$

$$\text{Sol: } \text{Dom}(f) = \Omega = \{z \in \mathbb{C} : 4z^3 - \frac{1}{2} \neq 0\} = \{z \in \mathbb{C} : z^3 \neq \frac{1}{8}\}$$

$$z^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = \frac{1}{8} & \Rightarrow |z| = \frac{1}{2} \\ 3 \arg(z) = 0 + 2k\pi & \Rightarrow \theta_k = \frac{2}{3}k\pi \Rightarrow \theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{1}{2}, z \neq \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{4} \right\}$$

$\Rightarrow f$ es holomorfa en $\text{Dom}(f) = \Omega$ por ser cociente de holomorfas con denominador no nulo.

Ejercicio 12: Cociente de funciones holomorfas

Hallar el abierto Ω más grande en el cual f sea holomorfa

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

Solución: $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : e^z \neq 1\}$

$$\bullet 1 = e^z \Rightarrow 1 = |e^z|$$

- $\bullet 1 = e^{x+yi} = e^x(\cos(y) + i \sin(y)) \Rightarrow 1 = |e^z| = e^x \Rightarrow x = 0$
- $\bullet$ Comparemos la parte imaginaria de ambos miembros:

$$0 = \sin(y) \Rightarrow y = k\pi$$

- $\bullet$ Evaluemos el coseno (la parte real) en estos valores:

$$1 = \cos(y) = \cos(k\pi) = (-1)^k \Rightarrow k \text{ par}, k = 2n : n \in \mathbb{Z}$$

En efecto,

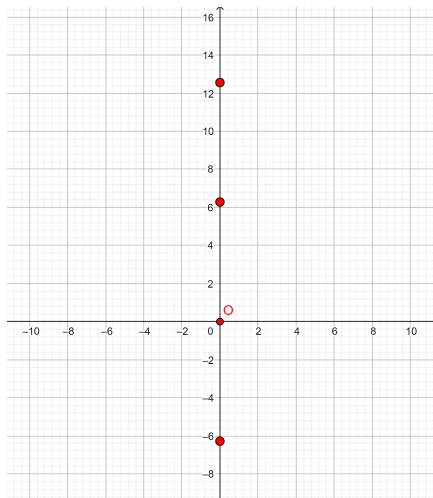
$$e^{2n\pi i} = \cos(2n\pi) + i \sin(2n\pi) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 2n\pi i, n \in \mathbb{Z}\}$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{e^z - 1} \text{ es holomorfa en } \Omega$$

por ser cociente de holomorfas

con denominador no nulo en Ω ✓



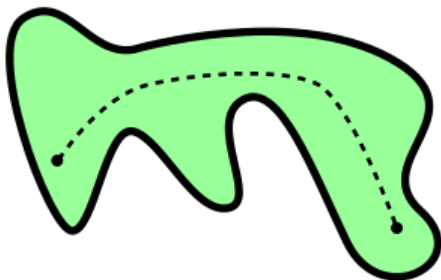
Los puntos fuera del dominio son $\dots - 2\pi i, 0, 2\pi i, 4\pi i, \dots$

FUNCIONES HOLOMORFAS EN CONJUNTOS CONEXOS

Conjuntos Arcoconexos

Estudiemos ahora funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y **conexo**.

$\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice **arcoconexo o conexo por curvas**: si todo par de puntos de Ω se puede unir por una curva contenida en Ω

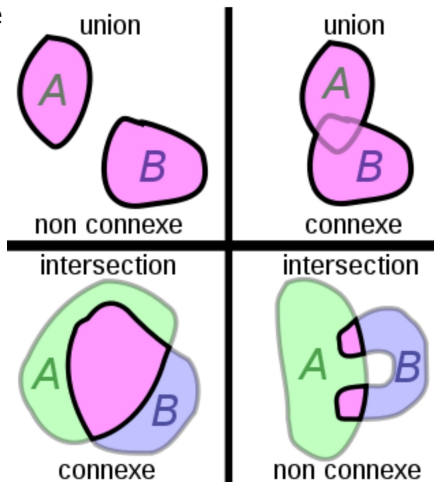


$\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y conexo $\Leftrightarrow$ es arcoconexo

Conjuntos Arcoconexos

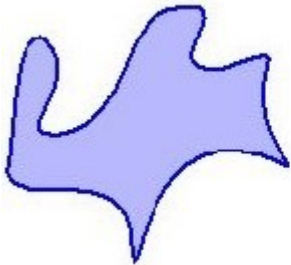
La unión y la intersección de arcoconexos

no necesariamente
es arcoconexo



Conjuntos Conexos

En general, un conjunto se dice **conexo** si no se puede cubrir con dos abiertos disjuntos, no vacíos:



Conexo



No Conexa

Ejercicio 13. Funciones $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. Probar que si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es holomorfa, entonces f es constante

Dem: Sea f holomorfa en $U \Rightarrow f(z)$ es derivable en U

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \Rightarrow u, v \text{ verifican Cauchy - R} \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Pero, la imagen de f está contenida en $\mathbb{R} \Rightarrow$ la parte imaginaria es cero:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \in \mathbb{R} \Rightarrow v(x, y) = 0 \quad \forall (x, y)$$

$$\Rightarrow u_x(x, y) = v_y(x, y) = 0, \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y) = 0 \quad \forall (x, y)$$

Es decir que las dos derivadas parciales de u son cero

$$\Rightarrow u = C \text{ es constante}, v = 0 \Rightarrow f = C \text{ es constante} \quad \checkmark$$

¿Es necesaria la hipótesis de conexión?

Contraejemplo: consideremos $\Omega = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$:

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z + 5| < 4\}, \quad \mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 5| < 4\}$$

y la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(z) = \begin{cases} 1 & z \in \mathcal{U} \\ -1 & z \in \mathcal{V} \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ holomorfa en Ω pero no es constante en Ω
aunque toma sólo valores en $\mathbb{R}$.

Es decir, el resultado no necesariamente vale

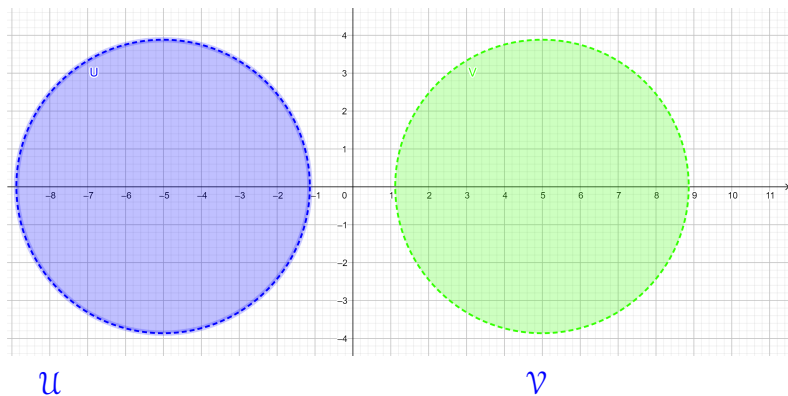
si $\Omega = \text{Dom}(f)$ no es conexo

Contraejemplo si $\Omega = \text{Dom}(f)$ no es conexo

Atención: El anterior sirve también de contraejemplo para mostrar que el siguiente enunciado deja de ser válido sin la hipótesis de Ω **conexo**:

$|f|$ constante en Ω abierto y **conexo** $\Rightarrow f$ es constante en Ω .

$\Omega = \text{Dom}(f)$ no es conexo



$$\Omega = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$$

Observación: $\Rightarrow f$ es constante en cada una de las dos
componentes conexas $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ ✓

Funciones con dominios abiertos y conexos

Práctica 3, ejercicio 12. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Probar

- $\operatorname{Re}(f)$ constante en $\Omega \Rightarrow f$ es constante en Ω .
- $\operatorname{Im}(f)$ constante en $\Omega \Rightarrow f$ es constante en Ω .
- $|f|$ constante en $\Omega \Rightarrow f$ es constante en Ω .
- $\operatorname{Arg}(f)$ constante en $\Omega \Rightarrow f$ es constante en Ω .

Demostración: como el Ejercicio 13.

Funciones con dominios abiertos y conexos

Práctica 3, ejercicio 11. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Probar que

- Si también $\bar{f}$ es holomorfa en $\Omega \Rightarrow f$ es constante.
- Si $f' = 0 \Rightarrow f$ es constante en Ω .
- Si g es holomorfa en Ω y $g' = f' \Rightarrow f - g$ es constante en Ω .

Demostración: como el **Ejercicio 13**.

Resolución de Práctica 3, Ejercicio 12. c

Si Ω es abierto y conexo, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $|f|$ es constante, entonces f es constante en Ω .

Solución: existe $C \geq 0$: $C = |f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)} \quad \forall z \in \Omega$

Si $C = 0 \implies f(z) = 0$ ó bien $\overline{f(z)} = 0$ para cada $z \in \Omega$ pues:

- $w = 0 \iff \overline{w} = 0$, luego, en el producto anterior, podemos suponer $0 = f(z)$.
- Si $0 = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \implies u(x, y) = 0 = v(x, y) \quad \forall (x, y)$
 $\implies f(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$
 $\implies f$ es constante en Ω

Si $C > 0 \implies f(z) \neq 0 \forall z \in \Omega \implies \overline{f(z)} = \frac{C}{f(z)}$ holomorfa
por ser cociente de holomorfas

$$\implies U(z) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(z)}) \quad \forall z \in \Omega$$

es combinación lineal de holomorfas, por lo tanto

$U(z)$ es holomorfa pero toma sólo valores en $\mathbb{R}$

Ej 12. c

$$\Rightarrow U(z) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(z)}) \quad \forall z \in \Omega$$

es holomorfa con parte imaginaria cero

Atención: su parte imaginaria no es V

Como en el **Ejercicio 13**, las identidades de Cauchy - Riemann implican

$$\Rightarrow U_x = \frac{\partial}{\partial y} 0 = 0 = -\frac{\partial}{\partial x} 0 = U_y \Rightarrow U \text{ es constante en } \Omega$$

Aplicando C - R a $f = U + iV \Rightarrow V$ es constante en Ω

$\Rightarrow$ f es constante en Ω 