MATE IV

Práctica 3

FUNCIONES ARMÓNICAS

Funciones Complejas: $f : \Omega \to \mathbb{C}$

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Toda $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se puede escribir como

$$f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$$

$\Rightarrow$ a cada f le corresponden las funciones $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$, su parte real y parte imaginaria, respectivamente.

Def. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice holomorfa en Ω si es derivable en Ω.

Ejemplos de Funciones Holomorfas

Ejercicio anterior:
Las sgtes resultan derivables por Cauchy - Riemann en todo $\mathbb{C}$, por lo tanto, son holomorfas en todo $\mathbb{C}$.

Ej 1. • Función exponencial compleja

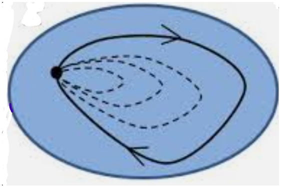
$$f(z) = e^z := e^{x+yi} = e^x\Big(\cos(y) + \operatorname{sen}(y) i\Big)$$

$$= \underbrace{e^x \cos(y)}_{u(x,y)} + \underbrace{e^x \operatorname{sen}(y)}_{v(x,y)} i$$

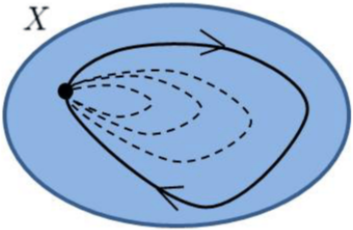
• Ej. 2. $g(z) = z^2 = (x + yi)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + \underbrace{2xy}_{v(x,y)}\, i$

Un conjunto U es simplemente conexo si no tiene agujeros, es decir, si todo punto interior a su frontera, pertenece a U.

Equivalentemente, U es simplemente conexo si toda curva en U se puede deformar de forma continua a un punto.



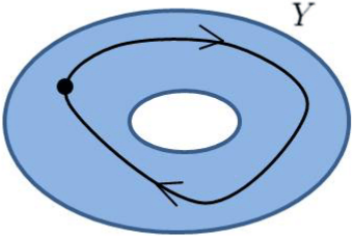
U es simplemente conexo si no tiene agujeros



✓ X es arcoconexo

$\Rightarrow X$ es conexo.

✓ X es simplemente conexo



✓ Y es conexo

✗ Y no es simplemente conexo

Funciones armónicas

Definición: Dado un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $h : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice armónica en Ω si h es 2 veces derivable y satisface la ecuación de Laplace $(h_{xx} + h_{yy})(x, y) = 0, \ \forall (x, y) \in \Omega$.

Si $u, v : \Omega \to \mathbb{C}$ son armónicas en Ω y verifican

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$ se dice que v es una conjugada armónica de u

Relación entre f holomorfa y las funciones u, v

Teorema: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto.
1) Si $f(x+yi) = u(x,y) + i\ v(x,y)$ es holomorfa en Ω y las funciones u, v son de clase C^2 entonces v es una conjugada armónica de u en Ω.

2) Recíprocamente, si v es una conjugada armónica de u en Ω entonces $f(x+yi) = u(x,y) + i\ v(x,y)$ es holomorfa en Ω

3) Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto simplemente conexo, por ejemplo, un disco abierto o todo $\mathbb{C}$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica, entonces existe v una conjugada armónica de u en Ω.

Ejemplos de conjuntos abiertos y simplemente conexos (es decir, sin agujeros) son $\Omega =$ un disco abierto ó bien $\Omega = \mathbb{C}$

Ejercicio 1

Encontrar una función $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ que sea una conjugada armónica de $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$.
Hallar la expresión de la función holomorfa $f(z)$ tal que

$$f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

para las funciones u, v anteriores.

Solución: Por Cauchy-Riemann, si $f = u + iv$ es derivable en $z \in \Omega$ entonces vale

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \text{en el mismo } z$$

Con $u = y^3 - 3x^2y$, empecemos imponiendo estas condiciones a una v desconocida, aunque sabemos que sólo son condiciones necesarias:

$$v(x,y) = \int v_y dy = \int u_x dy = \int -6xy \ dy = -3xy^2 + \varphi(x)$$

La 2da condición dice

$$3y^2 - 3x^2 = u_y = -v_x = +3y^2 - \varphi'(x)$$

Comparando ambos miembros obtenemos

$$-3x^2 = -\varphi'(x) \Rightarrow x^3 + C = \varphi(x)$$

Concluimos

$$v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C$$

Por lo tanto,

$$f(z) = (u + iv) = y^3 - 3x^2y + i\Big(-3xy^2 + x^3 + C\Big)$$

Conclusión: $f = u + iv$ es holomorfa

Obtuvimos

$$\boxed{f(z) = u(z) + iv(z) = y^3 - 3x^2y + i\Big(- 3xy^2 + x^3 + C\Big)}$$

Dejamos como ejercicios comprobar que:

- La anterior es el desarrollo en parte real $+i$ parte imaginaria de

$$f(z) = iz^3$$

la cual es holomorfa por ser producto de una potencia de z por una constante

- u y v verifican $0 = u_{xx} + u_{yy}$ y $0 = v_{xx} + v_{yy}$ ✓

Ejercicio 2

a) Probar que $u(x,y) = e^{-x}(x\,\mathrm{sen}(y) - y\cos(y))$ es armónica. Encontrar una función $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ que sea una conjugada armónica de $u(x,y)$.
b) Comprobar que si $f(z) = 0$

$$f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y) = ize^{-z} \quad \forall\ z = x + yi \in \mathbb{C}$$

Solución a) Por Cauchy-Riemann, si $f = u + iv$ es derivable en $z \in \Omega$ entonces vale

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \text{en el mismo } z$$

Con $u = e^{-x}(x\,\text{sen}(y) - y\cos(y))$, empecemos imponiendo estas condiciones a una v desconocida:

$$\boxed{v(x,y) = \int v_y\,dy} = \int u_x\,dy = \int e^{-x}[(-x+1)\,\text{sen}(y) + y\cos(y)]\,dy$$

$$= -e^{-x}(-x+1)\cos(y) + e^{-x}\int y\cos(y)\,dy$$

$$= e^{-x}(x-1)\cos(y) + e^{-x}\left[y\,\text{sen}(y) - \int \text{sen}(y)dy\right]$$

$$= e^{-x}[y\,\text{sen}(y) + (x-1+1)\cos(y)] + \varphi(x)$$

$$\boxed{= e^{-x}[y\,\text{sen}(y) + x\cos(y)] + \varphi(x)}$$

La 2da condición dice

$$e^{-x}[(x-1)\cos(y) + y\,\text{sen}(y)] = u_y = -v_x$$

$$= e^{-x}[(x-1)\cos(y) + y\,\text{sen}(y)] - \varphi'(x)$$

Ambos miembros son iguales $\Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = C \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\Rightarrow v(x,y) = e^{-x}[y\,\text{sen}(y) + x\cos(y)] + C}$$

Por lo tanto, $\boxed{f(z) = u + iv}$

$$\boxed{= e^{-x}\Big[x\,\text{sen}(y) - y\cos(y)\Big] + ie^{-x}\Big[y\,\text{sen}(y) + x\cos(y)\Big] + iC}$$

Si además si $f(z) = 0$, debe ser $C = 0$.
Escribamos $z = x + yi$ y probemos que entonces

$$f(z) = ize^{-z}$$

- En este caso, entonces, no hace falta verificar $0 = u_{xx} + u_{yy}$ y $0 = v_{xx} + v_{yy}$.

Fórmula de $f(z) = ize^{-z}$

$$\boxed{f(z) = ize^{-z}} \quad pues$$

$$ize^{-z} = i(x+yi)e^{-x-yi} = (-y + xi)e^{-x}[\cos(-y) + i\,\mathrm{sen}(-y)]$$

$$= (-y + xi)e^{-x}[\cos(y) - i\,\mathrm{sen}(y)]$$

$$= e^{-x}\Big[x\,\mathrm{sen}(y) - y\cos(y)\Big] + ie^{-x}\Big[y\,\mathrm{sen}(y) + x\cos(y)\Big]$$

$$= u(x,y) + iv(x,y) = f(z) \quad \checkmark$$

Los rolles de u y v no son intercambiables

Mostrar con un contraejemplo que $f(z) = u + iv$ holomorfa no implica $v + iu$ holomorfa, es decir, u no es una conjugada armónica de v

Contraejemplo: $f(z) = z = x + yi$ es holomorfa pero $g(z) = y + xi$ no lo es
En efecto, $g(z) = y + xi = i\bar{z} = \tilde{u} + i\tilde{v}$ entonces $\tilde{u}_x = 0 = \tilde{v}_y$ pero $\tilde{u}_y = 1 \neq -1 = -\tilde{v}_x$ ✓

- Sin embargo, vale $-u$ es una conjugada armónica de v, o sea, $\tilde{f} = v - iu$ es holomorfa

Ej 3. Sea $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ armónica y sobreyectiva: su gradiente $\nabla u \neq 0$. Hallar todas las $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de clase C^2 tales que $F\circ u$ sea armónica.

Solución: Sea F de clase C^2 y $g(x,y)=F\circ u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ entonces

- $\dfrac{\partial g}{\partial x}=F'(u)u_x \Rightarrow g_{xx}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=F''(u)(u_x)^2+F'(u)u_{xx}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y}=F'(u)u_y \Rightarrow g_{yy}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=F''(u)(u_y)^2+F'(u)u_{yy}$

Luego su Laplaciano $0=\Delta g=g_{xx}+g_{yy}$

$$=F''(u)\underbrace{(u_x^2+u_y^2)}_{=||\nabla u||^2>0}+F'(u)\underbrace{\left[u_{xx}+u_{yy}\right]}_{=0}$$

u sobreyectiva $\Rightarrow$ Todo $t=u(x,y)$

$\overbrace{\Leftrightarrow F''(t)=0\ \forall t\in\mathbb{R}}$

$$\boxed{\Leftrightarrow F(t)=At+B:\ A,B \text{ ctes}\in\mathbb{R}}\ \checkmark$$

Ejercicio 4. a) Sea $U =$ un disco abierto ó todo $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ (holomorfa) de clase C^2, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ armónica. Probar que $u(x,y) := \varphi \circ f(z)$ es armónica.

Solución 1) Derivar y calcular $u_{xx} + u_{yy} = 0 \; \forall (x,y)$.

Solución 2) Existe ψ una conjugada armónica de φ en U (simplemente conexo), entonces

$$G(z) := \varphi + i\psi \text{ es holomorfa}$$

$\Rightarrow G \circ f$ también es holomorfa= composición de holomorfas

$$G \circ f = \underbrace{\varphi \circ f(z)}_{=u(x,y)} + i\underbrace{\psi \circ f(z)}_{=v(x,y)}$$

Por lo tanto, $\varphi \circ f(z) =$ la parte real de $G \circ f \Rightarrow$ es armónica ✓

Ej 4. b) Probar que si $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, con u, v 2 veces derivables, entonces $\varphi(x,y) = u^2(x,y) - v^2(x,y)$ es armónica

Solución: Le apliquemos lo anterior a $\varphi(x,y) = x^2 - y^2$, que es C^2 y armónica por ser la parte real de:

$$G(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \text{ holomorfa}$$

$\Rightarrow G(f(z))$ también es holomorfa

$$= [f(z)]^2 = \underbrace{u(x,y)^2 - v(x,y)^2}_{\varphi(x,y)} + 2u(x,y)v(x,y)i$$

Luego, su parte real es armónica:

$$Re(f^2(z)) = \varphi(x,y) = u(x,y)^2 - v(x,y)^2 \ \checkmark$$

Ejercicio 5

a) Probar que $u(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ es armónica en $\Omega = \{z \neq 0\}$.

Encontrar una función $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ que sea una conjugada armónica de $u(x,y)$ en Ω.

b) Comprobar que

$$f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y) = \frac{i}{z} + k : k \in \mathbb{C}$$

Solución: Como antes, $u_x = v_y$ implica

$$v(x,y) = \int v_y dy = \int u_x dy = \int \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2} dy + \phi(x)$$

Si sustituimos $t = x^2 + y^2$ entonces

$$v(x,y) = \int \frac{-x}{t^2} dt = \frac{x}{x^2+y^2} + \phi(x)$$

Usemos luego la 2da identidad de C-R $u_y = -v_x$ y derivemos la anterior:

$$-\frac{d}{dx}v(x,y) = -\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{x^2+y^2} + \phi(x)\right] = -\left[\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \phi'(x)\right]$$

$$= \frac{d}{dy}u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Por lo tanto, $\phi'(x) = 0 \Rightarrow \phi(x) = C$.

Concluimos que $\boxed{v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + C.}$ Por lo tanto, la función holomorfa que se obtiene es

$$\boxed{f(z) = (u+iv)(x,y) = \frac{y+ix}{x^2+y^2} = \frac{i}{z} + iC \checkmark .}$$

Ej 6. Ecuaciones de Cauchy - Riemann en Forma Polar

Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(r,\theta) + i v(r,\theta)$. Probar que las Ecuaciones de Cauchy - Riemann clásicas son equivalentes a las sgtes en Forma Polar:

$$\boxed{v_\theta = r\ u_r, \qquad\qquad u_\theta = -r\ v_r}$$

En este caso,

$$\boxed{f'(z) = e^{-i\theta}[u_r + i v_r] = \frac{e^{-i\theta}}{r}[v_\theta - i u_\theta]}$$

Solución:

$$\boxed{f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)}$$

Derivemos por regla de la cadena

- $u_r = \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}$,
- $u_\theta = \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta}$

Reemplacemos en la expresión anterior las derivadas de x y de y sabiendo que

$$\boxed{x(r,\theta) = r\cos(\theta), \quad y(r,\theta) = r\,\mathrm{sen}(\theta)} \; \textit{es decir}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta), \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \mathrm{sen}(\theta), \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta)$$

- $u_r = u_x \dfrac{\partial x}{\partial r} + u_y \dfrac{\partial y}{\partial r}$,
- $u_\theta = u_x \dfrac{\partial x}{\partial \theta} + u_y \dfrac{\partial y}{\partial \theta}$

entonces

- $\boxed{u_r = u_x \cos(\theta) + u_y \operatorname{sen}(\theta)}$
- $\boxed{u_\theta = -u_x r \operatorname{sen}(\theta) + u_y r \cos(\theta)}$

Análogamente las derivadas de v:

- $v_r = v_x \cos(\theta) + v_y \operatorname{sen}(\theta)$,
- $v_\theta = -v_x r \operatorname{sen}(\theta) + v_y r \cos(\theta)$

Si u, v satisfacen las ecuaciones de Cauchy - Riemann:

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

entonces las derivadas de v se reescriben:

- $\boxed{v_r = -u_y \cos(\theta) + u_x \operatorname{sen}(\theta)}$
- $\boxed{v_\theta = u_y r \operatorname{sen}(\theta) + u_x r \cos(\theta)}$

Por lo tanto,

$$\boxed{v_\theta = r\ u_r, \qquad\qquad u_\theta = -r\ v_r} \checkmark$$

Fórmula de f': Despejemos u_x, u_y

$\bullet\ u_r = u_x \cos(\theta) + u_y \operatorname{sen}(\theta)$

$\bullet u_\theta = -u_x r \operatorname{sen}(\theta) + u_y r \cos(\theta)$

Escribamos el sistema en forma matricial equivalente a estas ecuaciones, donde las incógnitas son u_x, u_y:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ r\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{u_x = u_r\cos(\theta) - \frac{1}{r}u_\theta\,\mathrm{sen}(\theta), \quad u_y = u_r\,\mathrm{sen}(\theta) + \frac{1}{r}u_\theta\cos(\theta)}$$

Por C - R, sabemos que

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y$$

$$= u_r\cos(\theta) - \frac{1}{r}u_\theta\,\mathrm{sen}(\theta) - i\left[u_r\,\mathrm{sen}(\theta) + \frac{1}{r}u_\theta\cos(\theta)\right]$$

$$= u_r\left[\cos(\theta) - i\,\mathrm{sen}(\theta)\right] - \frac{i}{r}u_\theta\left[\cos(\theta) - i\,\mathrm{sen}(\theta)\right]$$

$$\boxed{= e^{-i\theta}[u_r - \frac{i}{r}u_\theta] = e^{-i\theta}[u_r + i\,v_r] \checkmark}$$

Equivalentemente,

$$\boxed{f'(z) = \frac{e^{-i\theta}}{r}[v_\theta - i\,u_\theta] \checkmark}$$

Ejercicio 7. Determinar el abierto más grande donde $f(z) = z^{-2}$ sea holomorfa y calcular f' en coordenadas polares

Solución: • $Dom(f) = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ y f es holomorfa allí

• Escribamos en polares $z^2 = r^2 e^{2it}$: $r = |z| > 0, t \in \mathbb{R}$

$$f(z) = z^{-2} = r^{-2} e^{-2it}$$

$$= r^{-2} \Big[\cos(2t) - i \operatorname{sen}(2t) \Big]$$

$$= u(r,t) + i v(r,t)$$

Por lo tanto, si usamos lo que sabemos:

$$\boxed{f'(z) = e^{-it}[u_r + iv_r]}$$

$$= e^{-ti}(-2)r^{-3}\Big[\cos(2t) - i\,\mathrm{sen}(2t)\Big]$$

$$= -2\ e^{-ti}r^{-3}e^{-2ti}$$

$$= -2\ r^{-3}e^{-3ti} = -2z^{-3} \checkmark$$