COMPLEMENTO PRÁCTICA 6 - EJERCICIOS 12 A 20 SINGULARIDADES Y RESIDUOS

Recordemos que el desarrollo en serie de Laurent de una función f en un entorno de una singularidad aislada z_0 válido en el disco reducido $0 < |z - z_0| < R$ está dado por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ donde $\mathcal{C}$ es una curva cerrada simple contenida en $0 < |z - z_0| < R$ orientada en sentido antihorario. El coeficiente a_{-1} en el desarrollo de Laurent es el *residuo de f en z_0* y lo denotamos por

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz.$$

Residuo en el infinito

Recordemos que si f tiene una singularidad aislada en infinito entonces f es holomorfa en un entorno de la forma

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}.$$

Si a_{-1} es el coeficiente de $1/z$ en el desarrollo de Laurent de f para $R < |z|$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

se define el residuo de f en infinito como

$$\text{Res}(f, \infty) = -a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r^-} f(z) dz$$

donde $\mathcal{C}_r^-$ es una circunferencia de centro 0 y radio $r > R$ orientada en sentido horario.

Para encontrar una expresión para el coeficiente a_{-1} , estudiamos la serie de Laurent de la función $g(z) = \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ alrededor de 0 y se obtiene que

$$\text{Res}(f, \infty) = -a_{-1} = -\text{Res}(g, 0) = -\text{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

Ejercicio 1: Demostrar que $f(z) = \frac{z^3 + 4z^2 - 2z + 5}{z + i}$ tiene un polo en ∞ , determinar el orden y calcular $\text{Res}(f, \infty)$.

Para saber si f tiene un polo en infinito debemos ver si $F(z) = f(1/z)$ tiene un polo en cero:

$$F(z) = f(1/z) = \frac{\frac{1}{z^3} + \frac{4}{z^2} - \frac{2}{z} + 5}{\frac{1}{z} + i} = \frac{1 + 4z - 2z^2 + 5z^3}{z^2(1 + iz)}$$

Entonces F tiene un polo de orden 2 en cero ya que

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 F(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 + 4z - 2z^2 + 5z^3}{1 + iz} = 1$$

y por lo tanto f tiene un polo de orden 2 en ∞ . Luego,

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{z^4} + \frac{4}{z^3} - \frac{2}{z^2} + \frac{5}{z}\right) \frac{1}{1 + iz} = \left(\frac{1}{z^4} + \frac{4}{z^3} - \frac{2}{z^2} + \frac{5}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n z^n$$

si $0 < |z| < 1$. Al hacer el producto para encontrar el coeficiente de $1/z$ nos queda que:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, \infty) &= -\text{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = -[(-i)^3 + 4(-i)^2 - 2(-i) + 5] \\ &= -[i - 4 + 2i + 5] \\ &= -1 - 3i. \end{aligned}$$

Ejercicio 2: Calcular el residuo en $z_0 = 0$ de la función

$$f(z) = \frac{\sinh(z)}{z^4}.$$

Usando la definición de $\sinh(z)$ en términos de exponenciales y la serie de Taylor de la exponencial podemos hallar la serie de Taylor de $\sinh(z)$, es decir,

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

para $0 \geq |z|$. Luego,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+5)!} \end{aligned}$$

de aquí deducimos que $\text{Res}(f, 0) = a_{-1} = \frac{1}{6}$.

Ejercicio 3: Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} \tan(z) dz$$

donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia de centro 0 y radio 2 orientada antihorario.

Para calcular esta integral podemos recurrir al Teorema de los residuos:

Teorema.

Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto y f una función holomorfa en D con excepción de un número finito de puntos en D que son singularidades aisladas de f .

Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada simple orientada antihorario tal que $\mathcal{C}$ y la región encerrada por $\mathcal{C}$ están contenidas en D y tal que $\mathcal{C}$ no pasa por ninguna singularidad. Sean $z_1, \dots, z_k$ los puntos singulares que están en el interior de $\mathcal{C}$. Entonces,

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j).$$

Recordemos que todas las singularidades de la función $\tan(z)$ son polos simples (ver ejercicio 9, práctica 6) y vienen dadas por los ceros de $\cos(z)$ que son los puntos de la forma

$$z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Observamos que las singularidades que están en el interior de la circunferencia $|z| = 2$ son $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$. Luego, usando el Teorema de los residuos tenemos que

$$\int_{\mathcal{C}} \tan(z) dz = 2\pi i \left[\text{Res} \left(\tan(z), \frac{\pi}{2} \right) + \text{Res} \left(\tan(z), -\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

donde

$$\text{Res} \left(\tan(z), \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\text{sen}(z)}{\cos(z)} = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(z) + (z - \pi/2) \cos(z)}{-\text{sen}(z)} = -1$$

y

$$\text{Res} \left(\tan(z), -\frac{\pi}{2} \right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \left(z + \frac{\pi}{2} \right) \frac{\text{sen}(z)}{\cos(z)} = \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(z) + (z + \pi/2) \cos(z)}{-\text{sen}(z)} = -1.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathcal{C}} \tan(z) dz = 2\pi i \left[\text{Res} \left(\tan(z), \frac{\pi}{2} \right) + \text{Res} \left(\tan(z), -\frac{\pi}{2} \right) \right] = 2\pi i[-1 - 1] = -4\pi i.$$

Ejercicio 4:

a) Sean f, g dos funciones holomorfas en $D(z_0, R)$ para algún $0 < R \leq \infty$ tal que $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = g'(z_0) = 0$ y $g''(z_0) \neq 0$. Probar que

$$\text{Res} \left(\frac{f}{g}, z_0 \right) = \frac{6f'(z_0)g''(z_0) - 2f(z_0)g'''(z_0)}{3(g''(z_0))^2}.$$

b) Calcular el residuo de $h(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ en $z_0 = 1$.

a) Como f y g son holomorfas en $D(z_0, R)$, ambas tienen desarrollos en serie de Taylor, alrededor de z_0 dados por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

donde $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ y $b_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}$. Notemos que si $g(z_0) = g'(z_0) = 0$ entonces g se puede escribir como

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=2}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+2} (z - z_0)^n$$

lo que nos dice que z_0 es un cero de orden 2 de g . Luego, como $f(z_0) \neq 0$, podemos afirmar que f/g tiene un polo de orden 2 en z_0 , es decir, su desarrollo de Laurent tiene la forma

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

de donde

$$\begin{aligned} f(z) &= g(z) \left(\frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \right) \\ &= (z - z_0)^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+2} (z - z_0)^n \right) \left(\frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \right) \\ &= c_{-2} \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+2} (z - z_0)^n + c_{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+2} (z - z_0)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n b_{n+2-k} c_k \right) (z - z_0)^{n+2} \\ &= c_{-2} \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+2} (z - z_0)^n + c_{-1} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} (z - z_0)^n + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-2} b_{n-k} c_k \right) (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Comparando esta serie con el desarrollo en serie de f tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = c_{-2} \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+2} (z - z_0)^n + c_{-1} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} (z - z_0)^n + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-2} b_{n-k} c_k \right) (z - z_0)^n$$

e igualando los coeficientes de los términos de grado 0 y 1 obtenemos que

$$a_0 = c_{-2} b_2$$

$$a_1 = c_{-2} b_3 + c_{-1} b_2$$

de donde

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{f}{g}, z_0 \right) &= c_{-1} = \frac{a_1}{b_2} - \frac{c_{-2} b_3}{b_2} = \frac{a_1}{b_2} - \frac{a_0 b_3}{b_2^2} = \frac{f'(z_0)}{g''(z_0)/2} - \frac{f(z_0) g'''(z_0)/6}{(g''(z_0))^2/4} \\ &= 2 \frac{f'(z_0)}{g''(z_0)} - \frac{2f(z_0) g'''(z_0)}{3(g''(z_0))^2} \\ &= \frac{6f'(z_0) g''(z_0) - 2f(z_0) g'''(z_0)}{3(g''(z_0))^2}. \end{aligned}$$

b) Si llamamos $f(z) = e^z$ y $g(z) = (z - 1)^2$ tenemos que f no tiene ceros y es holomorfa en $\mathbb{C}$ y $g'(z) = 2(z - 1)$, $g''(z) = 2$, con lo cual $g(1) = 0 = g'(1)$ y $g''(1) = 2 \neq 0$. Luego, por el ítem a)

$$\operatorname{Res}(h, 1) = \operatorname{Res} \left(\frac{f}{g}, 1 \right) = \frac{6e(2) - 2e(0)}{3(2)^2} = \frac{12e}{12} = e.$$

Ejercicio 5: Probar que

$$\int_{|z|=1} \frac{5z^6 + 4}{2z^7 + 1} dz = 5\pi i.$$

donde la circunferencia $|z| = 1$ está orientada en sentido antihorario.

Recordemos que si f es una función holomorfa en $\mathbb{C}$ excepto en una cantidad finita de singularidades aisladas $z_1, \dots, z_n$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k) = -\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

Para hallar el valor de la integral del enunciado observamos que las singularidades de la función

$$f(z) = \frac{5z^6 + 4}{2z^7 + 1}$$

son los puntos donde $2z^7 + 1 = 0$, es decir, $z^7 = -1/2$. Como $|-1/2|^{1/7} = 1/\sqrt[7]{2}$ y $\text{Arg}(-1/2) = \pi$, tenemos que las raíces séptimas de $-1/2$ son:

$$z_k = \frac{1}{\sqrt[7]{2}} e^{\frac{\pi+2k\pi}{7}i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

y todas están en la región interior a la circunferencia $|z| = 1$. Por el Teorema de los residuos tenemos que

$$\int_{|z|=1} \frac{5z^6 + 4}{2z^7 + 1} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^6 \text{Res}(f, z_k)$$

pero por el resultado que recordamos antes

$$\int_{|z|=1} \frac{5z^6 + 4}{2z^7 + 1} dz = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

Calculando el lado derecho de la igualdad anterior obtenemos que

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} \left(\frac{5(\frac{1}{z})^6 + 4}{2(\frac{1}{z})^7 + 1}\right) = \frac{1}{z^2} \left(\frac{z^7(5 + 4z^6)}{z^6(2 + z^7)}\right) = \frac{5 + 4z^6}{z(2 + z^7)}$$

y

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{5 + 4z^6}{z(2 + z^7)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{5 + 4z^6}{2 + z^7} = \frac{5}{2}.$$

Finalmente, concluimos que

$$\int_{|z|=1} \frac{5z^6 + 4}{2z^7 + 1} dz = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = 2\pi i \frac{5}{2} = 5\pi i.$$