Geometría Diferencial

Primer cuatrimestre - 2025

Práctica 7

---

1. Consideremos sobre S^2 la métrica riemanniana g inducida por la de $\mathbb{R}^3$ y sea (U, ϕ) la carta de S^2 tal que $\phi(U) = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ y

$$\phi^{-1}(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi\theta)$$

para cada $(\theta, \phi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Determine la expresión local con respecto a esa carta de la métrica g y la de la correspondiente forma de volumen.

2. Sea G un grupo que actúa sobre una variedad M de manera propiamente discontinua y sea g una métrica riemanniana sobre M.

   a) Dé una definición de concepto de *métrica* G-*invariante* sobre M.

   b) Muestre que si la métrica g es G-invariante, entonces existe una única métrica riemanniana sobre el cociente M/G de manera tal que la proyección $\pi : M \to M/G$ es una isometría local.

   c) Si el grupo G es finito, entonces

$$g = \frac{1}{|G|}\sum_{\gamma\in G}\gamma^*(g)$$

   es una métrica riemanniana sobre M que es G-invariante.

   d) Muestre que la métrica usual de S^n es invariante con respecto a la acción del grupo cíclico de orden dos C_2 en la que el elemento no trivial actúa vía la función $x \in S^n \mapsto -x \in S^n$ y encuentre la expresión de la métrica inducida sobre $\mathbb{RP}^n = S^2/C_2$ con respecto a las cartas usuales de $\mathbb{RP}^n$.

3. Probar que los siguientes dos modelos del plano hiperbólico son isométricos:

   a) *Semiplano de Poincaré*: Consideramos $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ con la carta canónica dada por la inclusión $\mathbb{H} \to \mathbb{R}^2$, y la métrica riemanniana g que en esa carta tiene expresión

$$g = \frac{1}{y^2}dx \otimes dx + \frac{1}{y^2}dy \otimes dy.$$

   b) *Bola de Poincaré*: Consideramos el disco $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ con la métrica

$$g = \frac{4}{(1 - x^2 + y^2)^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy).$$

   c) *Modelo del Hiperboloide:* Consideramos la variedad $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ y le damos la métrica $g = \iota^* q$ donde $\iota : M \to \mathbb{R}^3$ es la inclusión y

$$q = dx \otimes dx + dy \otimes dy - dz \otimes dz$$

   es la métrica de Minkowski.

4. Sea M una variedad Riemanniana.

   a) Probar que la métrica induce un isomorfismo de fibrados entre TM y T^*M.

   b) Probar que para toda función suave $f : M \to \mathbb{R}$ existe un campo $\mathrm{grad}(f)$ tal que
   $$X(f) = \langle \mathrm{grad}(f), X \rangle$$
   para cualquier campo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

5. Sea M una variedad riemaniana orientada y sea dV el elemento de volumen riemaniana correspondiente. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo sobre M, llamamos *divergencia* de X a la función $\mathrm{div}(f)$ tal que
   $$d(i_X(dV)) = \mathrm{div}(X) \cdot dV.$$
   Obtenemos de esta forma una función $\mathrm{div} : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$.

   a) Si $u \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces
   $$\mathrm{div}(uX) = u \cdot \mathrm{div}(X) + \langle \mathrm{grad}(u), X \rangle.$$

   b) Deducir la fórmula de integración por partes
   $$\int_M \langle \mathrm{grad}(u), X \rangle \cdot dV = -\int_M u \cdot \mathrm{div}(X) \cdot dV + \int_{\partial M} u \langle X, N \rangle \cdot d\tilde{V}.$$
   donde N es el campo normal exterior unitario a ∂M.

6. Si f es una función diferenciable sobre una variedad riemaniana M, el *laplaciano* de f es la función
   $$\Delta(f) = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)).$$

   a) Muestre que el operador laplaciano en $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual es el laplaciano clásico. Determine el laplaciano de la esfera S^2 dotada de su métrica usual y del semiplano de Poincaré.

   b) Muestre que si M es una variedad riemanniana orientada y compacta, entonces para cualesquiera dos funciones $u, v \in C^\infty(M)$ se tiene que
   $$\int_M u\Delta v \cdot dV = -\int_M \langle \mathrm{grad}(u), \mathrm{grad}(v) \rangle \cdot dV + \int_{\partial M} uN(v) \cdot d\tilde{V}.$$
   donde N es un campo normal unitario exterior a ∂M.

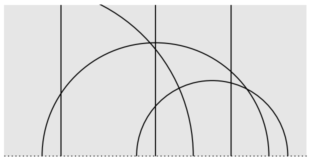
7. Considere sobre $\mathbb{R}^2$ la métrica usual y la carta dada por coordenadas polares (θ, r) y sea ∇ la conexión de Levi–Civita. Calcule los campos
   $$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right), \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right), \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right), \text{ y } \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

8. Sea M una subvariedad de codimensión 1 de $\mathbb{R}^n$. Dotemos a $\mathbb{R}^n$ de su métrica usual, a M de la métrica g inducida y sea ∇ la conexión de Levi–Civita correspondiente a g. Sean X e Y elementos de $\mathfrak{X}(M)$, sea p un punto de M y sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X_p$. Muestre que el valor de $\nabla_X Y$ en p coincide con la proyección ortogonal sobre T_pM del vector
   $$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y_{\alpha(t)}$$
   de $\mathbb{R}^n$.

9. Sea M una variedad riemaniana, ∇ la conexión de Levi–Civita correspondiente y sea $c : (a, b) \to M$ una curva diferenciable. Muestre que si X e Y son campos vectoriales a lo largo de c, entonces
$$\frac{d}{dt}\langle X, X\rangle = \langle \nabla_{c'} X, Y\rangle + \langle X, \nabla_{c'} Y\rangle,$$
y deduzca de esto que el transporte paralelo con respecto a la conexión de Levi–Civita preserva normas y ángulos.

10. Sea M una variedad Riemanniana y $f : M \to \mathbb{R}$ una función suave. Probar que si $\|\operatorname{grad}(f)\|$ es constantemente 1, entonces las curvas integrales de $\operatorname{grad}(f)$ son geodésicas.

11. Encuentre la ecuación de las geodésicas en términos de los símbolos de Cristoffel. Muestre que las geodésicas de $\mathbb{R}^n$ con respecto a su métrica usual son las rectas, que las geodésicas de la esfera S^n con respecto a su métrica usual son los círculos máximos, y que las geodésicas del semiplano de Poincaré son las semirrectas perpendiculares al borde o los semicírculos centrados en el borde.



12. Sea G un grupo de Lie de dimensión n.

    a) Sean $X_1, \dots, X_n$ campos vectoriales invariantes a izquierda que generan al álgebra de Lie $\operatorname{Lie}(G)$ como espacio vectorial. Muestre que hay exactamente una conexión afín ∇ sobre G tal que $\nabla_{X_i} X_j = 0$ para cada elección de i y j en $\{1, \dots, n\}$.

    b) Muestre que, de hecho, la conexión ∇ no depende de la elección de los campos invariantes a izquierda $X_1, \dots, X_n$, mientras éstos generen a $\operatorname{Lie}(G)$. Esto nos dice que la conexión ∇ está canónicamente asociada al grupo G: se la conoce como la $(-)$-conexión de G.

    c) Calcule la curvatura y la torsión de esta conexión.

13. Si G es un grupo de Lie que posee una métrica riemanniana biinvariante, entonces el tensor de curvatura es tal que
$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[Z, [X, Y]]$$
cada vez que X, Y y Z son campos vectoriales sobre G invariantes a izquierda.