

# Geometría Diferencial

Primer cuatrimestre - 2025

Práctica 7

---

1. Consideremos sobre  $S^2$  la métrica riemanniana  $g$  inducida por la de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $(U, \phi)$  la carta de  $S^2$  tal que  $\phi(U) = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$  y

$$\phi^{-1}(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

para cada  $(\theta, \phi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ . Determine la expresión local con respecto a esa carta de la métrica  $g$  y la de la correspondiente forma de volumen.

2. Sea  $G$  un grupo que actúa sobre una variedad  $M$  de manera propiamente discontinua y sea  $g$  una métrica riemanniana sobre  $M$ .

- a) Dé una definición de concepto de *métrica G-invariante* sobre  $M$ .  
b) Muestre que si la métrica  $g$  es  $G$ -invariante, entonces existe una única métrica riemanniana sobre el cociente  $M/G$  de manera tal que la proyección  $\pi : M \rightarrow M/G$  es una isometría local.  
c) Si el grupo  $G$  es finito, entonces

$$g = \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma \in G} \gamma^*(g)$$

es una métrica riemanniana sobre  $M$  que es  $G$ -invariante.

- d) Muestre que la métrica usual de  $S^n$  es invariante con respecto a la acción del grupo cíclico de orden dos  $C_2$  en la que el elemento no trivial actúa vía la función  $x \in S^n \mapsto -x \in S^n$  y encuentre la expresión de la métrica inducida sobre  $\mathbb{R}P^n = S^2/C_2$  con respecto a las cartas usuales de  $\mathbb{R}P^n$ .

3. Probar que los siguientes modelos del plano hiperbólico son isométricos:

- a) *Semiplano de Poincaré*: Consideramos  $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  con la carta canónica dada por la inclusión  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , y la métrica riemanniana  $g$  que en esa carta tiene expresión

$$g = \frac{1}{y^2} dx \otimes dx + \frac{1}{y^2} dy \otimes dy.$$

- b) *Bola de Poincaré*: Consideramos el disco  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  con la métrica

$$g = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2} (dx \otimes dx + dy \otimes dy).$$

- c) *Modelo del Hiperboloide*: Consideramos la variedad  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}$  y le damos la métrica  $g = \iota^*q$  donde  $\iota : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la inclusión y

$$q = dx \otimes dx + dy \otimes dy - dz \otimes dz$$

es la métrica de Minkowski.

4. Sea  $M$  una variedad Riemanniana.

- a) Probar que la métrica induce un isomorfismo de fibrados entre  $TM$  y  $T^*M$ .  
 b) Probar que para toda función suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  existe un campo  $\text{grad}(f)$  tal que

$$X(f) = \langle \text{grad}(f), X \rangle$$

para cualquier campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

5. Sea  $M$  una variedad riemanaiana orientada y sea  $dV$  el elemento de volumen riemanaiana correspondiente. Si  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es un campo sobre  $M$ , llamamos *divergencia* de  $X$  a la función  $\text{div}(X)$  tal que

$$d(i_X(dV)) = \text{div}(X) \cdot dV.$$

Obtenemos de esta forma una función  $\text{div} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ .

- a) Si  $u \in C^\infty(M)$  y  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces

$$\text{div}(uX) = u \cdot \text{div}(X) + \langle \text{grad}(u), X \rangle.$$

- b) Deducir la fórmula de integración por partes

$$\int_M \langle \text{grad}(u), X \rangle \cdot dV = - \int_M u \cdot \text{div}(X) \cdot dV + \int_{\partial M} u \langle X, N \rangle \cdot d\tilde{V}.$$

donde  $N$  es el campo normal exterior unitario a  $\partial M$ .

6. Si  $f$  es una función diferenciable sobre una variedad riemanaiana  $M$ , el *laplaciano* de  $f$  es la función

$$\Delta(f) = \text{div}(\text{grad}(f)).$$

- a) Muestre que el operador laplaciano en  $\mathbb{R}^2$  con la métrica usual es el laplaciano clásico. Determine el laplaciano de la esfera  $S^2$  dotada de su métrica usual y del semiplano de Poincaré.  
 b) Muestre que si  $M$  es una variedad riemanaiana orientada y compacta, entonces para cualesquiera dos funciones  $u, v \in C^\infty(M)$  se tiene que

$$\int_M u \Delta v \cdot dV = - \int_M \langle \text{grad}(u), \text{grad}(v) \rangle \cdot dV + \int_{\partial M} u N(v) \cdot d\tilde{V}.$$

donde  $N$  es un campo normal unitario exterior a  $\partial M$ .

7. Considere sobre  $\mathbb{R}^2$  la métrica usual y la carta dada por coordenadas polares  $(\theta, r)$  y sea  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita. Calcule los campos

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad \text{y} \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

8. Sea  $M$  una subvariedad de codimensión 1 de  $\mathbb{R}^n$ . Dotemos a  $\mathbb{R}^n$  de su métrica usual, a  $M$  de la métrica  $g$  inducida y sea  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita correspondiente a  $g$ . Sean  $X$  e  $Y$  elementos de  $\mathfrak{X}(M)$ , sea  $p$  un punto de  $M$  y sea  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  una curva diferenciable tal que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = X_p$ . Muestre que el valor de  $\nabla_X Y$  en  $p$  coincide con la proyección ortogonal sobre  $T_p M$  del vector

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y_{\alpha(t)}$$

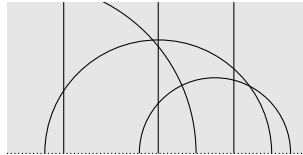
de  $\mathbb{R}^n$ .

9. Sea  $M$  una variedad riemanniana,  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita correspondiente y sea  $c : (a, b) \rightarrow M$  una curva diferenciable. Muestre que si  $X$  e  $Y$  son campos vectoriales a lo largo de  $c$ , entonces

$$\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_{c'} X, Y \rangle + \langle X, \nabla_{c'} Y \rangle,$$

y deduzca de esto que el transporte paralelo con respecto a la conexión de Levi-Civita preserva normas y ángulos.

10. Sea  $M$  una variedad Riemanniana y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave. Probar que si  $\|\text{grad}(f)\|$  es constantemente 1, entonces las curvas integrales de  $\text{grad}(f)$  son geodésicas.
11. Encuentre la ecuación de las geodésicas en términos de los símbolos de Cristoffel. Muestre que las geodésicas de  $\mathbb{R}^n$  con respecto a su métrica usual son las rectas, que las geodésicas de la esfera  $S^n$  con respecto a su métrica usual son los círculos máximos, y que las geodésicas del semiplano de Poincaré son las semirrectas perpendiculares al borde o los semicírculos centrados en el borde.



12. Sea  $G$  un grupo de Lie de dimensión  $n$ .
- Sean  $X_1, \dots, X_n$  campos vectoriales invariantes a izquierda que generan al álgebra de Lie  $\text{Lie}(G)$  como espacio vectorial. Muestre que hay exactamente una conexión afín  $\nabla$  sobre  $G$  tal que  $\nabla_{X_i} X_j = 0$  para cada elección de  $i$  y  $j$  en  $\{1, \dots, n\}$ .
  - Muestre que, de hecho, la conexión  $\nabla$  no depende de la elección de los campos invariantes a izquierda  $X_1, \dots, X_n$ , mientras éstos generen a  $\text{Lie}(G)$ . Esto nos dice que la conexión  $\nabla$  está canónicamente asociada al grupo  $G$ : se la conoce como la  $(-)$ -conexión de  $G$ .
  - Calcule la curvatura y la torsión de esta conexión.
13. Si  $G$  es un grupo de Lie que posee una métrica riemanniana biinvariante, entonces el tensor de curvatura es tal que

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[Z, [X, Y]]$$

cada vez que  $X, Y$  y  $Z$  son campos vectoriales sobre  $G$  invariantes a izquierda.