Geometría Diferencial

Primer cuatrimestre - 2025

Práctica 6

---

1. Sea M una variedad diferenciable.

   a) Pruebe que el producto wedge induce una estructura de anillo en
   $$H^{\cdot}(M) := \bigoplus_{k \geqslant 0} H^k(M).$$

   b) Sea $f : M \to N$ una función suave. Pruebe que el pullback induce un morfismo de anillos $f^* : H^{\cdot}(N) \to H^{\cdot}(M)$.

2. Calcule la cohomología y su estructura de anillo de los siguientes espacios:

   a) el complemento en $\mathbb{R}^n$ de un conjunto finito de puntos;

   b) el cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ y la banda de Möbius;

   c) un producto cartesiano de dos esferas (de cualquier dimensión);

   d) los espacios proyectivos reales;

   e) la botella de Klein.

3. Sea (M, ω) una variedad simpléctica compacta de dimensión $2n$. Probar que hay un morfismo de anillos inyectivo $f : \mathbb{R}[x]/\langle x^{n+1} \rangle \to H^{\cdot}(M)$ tal que $f(x) = \omega$. Deducir que $H^{2k}(M) \neq 0$ para todo $k = 0, \dots, n$.

4. Probar que los espacios proyectivos complejos son variedades simplécticas y calcular su cohomología.

   Sugerencia: Considerar la proyección $\pi : S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{CP}^n$ y probar que la forma $\sum_{j=0}^{n} dx_j \wedge dy_j$ es el pullback por π de una forma ω_{FS}, donde escribimos a los vectores de $\mathbb{C}^{n+1}$ de la forma $(x_0 + iy_0, x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$.

5. Probar que $\mathbb{CP}^3$ y $S^2 \times S^4$ no son difeomorfas.

6. Sea M una variedad diferenciable.

   a) Dada una función suave $\gamma : [0,1] \to M$, probar que
   $$\omega \in \Omega^1(M) \mapsto \int_{S^1} \gamma^* \omega \in \mathbb{R}$$
   define una transformación lineal $\int_\gamma : H^1(M) \to \mathbb{R}$.

   b) Probar que si $\gamma' : [0,1] \to M$ es otra función suave homotópica a γ, $\int_{\gamma'} = \int_\gamma$.

   **c*) Probar que todo camino $\gamma : [0,1] \to M$ es homotópico, relativo a los extremos, a uno suave.

   Sugerencia: Recordar el ejercicio 20 de la práctica 1 y usar que cualesquiera dos funciones $f, g : [0,1] \to [0,1]$ que coinciden en los extremos son homotópicas relativo al borde.

d) Probar que, para todo punto base $p \in M$, hay un morfismo de grupos

$$\pi_1(M, p)_{ab} \to H^1(M)^*$$

que extiende la construcción del ítem *a).*
Nota: Si M es conexa, este morfismo induce un isomorfismo $(\pi_1(M)_{ab} \otimes \mathbb{R})^{**} \simeq H^1(M)^*$.

7. Sea $f : S^3 \to S^2$ una función suave y $\omega \in \Omega^2(S^2)$ una 2-forma de volumen normalizada para que $\int_{S^2} \omega = 1$.

   a) Probar que existe una 1-forma $\eta \in \Omega^1(S^3)$ tal que $d\eta = f^*\omega$.

   b) Sea η como en el inciso anterior. Probar que

   $$H(f) = \int_{S^3} \eta \wedge d\eta$$

   no depende de la elección de ω y η. Este numero es el invariante de Hopf de f.

   c) Probar que si f y g son funciones homotópicas, entonces $H(f) = H(g)$.

8. Sean M y N variedades compactas, conexas y orientadas de dimensión n y sea $f : M \to N$ una función suave.

   a) Probar que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

   $$\int_M f^*\omega = k \int_N \omega$$

   para toda n-forma $\omega \in \Omega^n(N)$. El número k, denotado por $\deg(f)$, es el grado de la función f.

   b) Probar que si $q \in N$ es un valor regular de f, entonces

   $$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} sg_f(p)$$

   donde $sg_f(p)$ vale 1 si f preserva la orientación en p y -1 si no. En particular, k es entero.
   Sugerencia: Probar que f es un revestimiento finito en un entorno de q y tomar ω soportada en dicho entorno.

   c) Probar que si $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son funciones suaves entre variedades compactas, conexas y orientadas, entonces $\deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f)$.

   d) Probar que si f y g son funciones homotópicas, entonces $\deg(f) = \deg(g)$.

9. Pruebe que para toda variedad diferenciable de dimensión n compacta y no orientable M se tiene que $H^n(M) = 0$.

   Sugerencia: Utilice el revestimiento de orientaciones y el resultado correspondiente para M compacta y orientable.

10. (Cohomología con soporte compacto) Sea M una variedad de dimensión n.

    a) Probar que si ω tiene soporte compacto, entonces $d\omega$ también. Por lo tanto, tenemos un complejo de formas con soporte compacto:

    $$0 \longrightarrow \Omega_c^0(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega_c^n(M) \longrightarrow 0.$$

    La cohomología con soporte compacto $H_c^k(M)$ es el k-ésimo grupo de cohomología de este complejo.

b) Probar que si $U \subset M$ es abierto, entonces $i_! : \Omega_c^\cdot(U) \to \Omega_c^\cdot(M)$ dado por la extensión por 0 fuera de U esta bien definido y cumple que $d \circ i_! = i_! \circ d$. Así induce un morfismo $i_* : H_c^\cdot(U) \to H_c^\cdot(M)$ en cohomología con soporte compacto.

c) Probar que si $f : M \to N$ es una función propia, entonces induce un morfismo en cohomología con soporte compacto $f^* : H_c^k(N) \to H_c^k(M)$ vía el pullback usual.

d) Probar que si $U, V \subset M$ son abiertos con $M = U \cup V$, tenemos una sucesión exacta de complejos

$$0 \to \Omega_c^\cdot(U \cap V) \to \Omega_c^\cdot(U) \oplus \Omega_c^\cdot(V) \to \Omega_c^\cdot(M) \to 0$$

que induce una sucesión exacta larga en cohomología con soporte compacto

$$\cdots \to H_c^k(U \cap V) \to H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \to H_c^k(M) \to H_c^{k+1}(U \cap V) \to \cdots.$$

11. Sea M una variedad diferenciable orientada de dimensión n y k un entero entre 0 y n inclusive. Probar que $H^k(M) \oplus H_c^{n-k}(M) \to \mathbb{R}$, $([\omega], [\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$, es una transformación lineal bien definida.

12. Sea M una variedad diferenciable conexa.

    a) Probar que $H_c^0(M)$ es $\mathbb{R}$ si M es compacta y 0 si no.

    b) Probar que $H^n(M) = 0$ si M no es compacta.
    Sugerencia: Considerar primero el caso en que M es orientable.

13. Sea M una variedad diferenciable compacta. Un cubrimiento finito de M por abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ se dice bueno si cada abierto U_i es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y para todo subconjunto $J \subset I$ la intersección $\cap_{j \in J} U_j$ también lo es o es vacía. Utilizar que toda variedad compacta admite un cubrimiento bueno para probar que $H^\cdot(M)$ es de dimensión finita.

14. Sea M una variedad diferenciable compacta. Se define su característica de Euler como

$$\chi(M) = \sum (-1)^i \dim_{\mathbb{R}} H^i(M).$$

    Probar que, si M es orientable y su dimensión es impar, $\chi(M) = 0$.

15. Sea M una variedad diferenciable conexa y orientada de dimensión n y $f : S \to M$ una función suave y propia desde una variedad orientada de dimensión m.

    a) Probar que

$$\omega \in \Omega_c^m(M) \mapsto \int_S f^*\omega$$

    induce una transformación lineal $H_c^m(M) \to \mathbb{R}$.

    b) Deducir que existe una única clase $c_f \in H^{n-m}(M)$ tal que

$$\int_S f^*\omega = \int_M \omega \wedge c_f$$

    para toda $\omega \in \Omega_c^m(M)$ cerrada.

    c) Probar que si S es el borde de una variedad compacta y orientada T y f se extiende a T, $c_f = 0$.

    d) Probar que hay una función

$$\{f : S^m \to M \text{ suave}\}/\text{homotopía} \to H^{n-m}(M)$$

    dada por $f \mapsto c_f$.