Geometría Diferencial

Primer cuatrimestre - 2025

Práctica 5

---

1. Muestre que el producto de una variedad con una variedad con borde es una variedad con borde. ¿Qué puede decir del producto de dos variedades con borde?

2. Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable que tiene a 0 por valor regular, entonces el conjunto $M = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \geqslant 0\}$ tiene una estructura natural de variedad con borde tal que la inclusión $M \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable.

3. ¿Puede ser que la variedad subyacente a un grupo de Lie tenga borde no vacío?

4. Sea M una variedad con borde. Muestre que existe un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que para cada $p \in \partial M$ el vector $X_p \in T_pM$ apunta «hacia afuera».

5. Sean M y N variedades diferenciales orientadas de dimensión n y sean ω y η dos n-formas de M de soporte compacto. Probar que:

   a) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces
   $$\int_M (a\omega + b\eta) = a\int_M \omega + b\int_M \eta.$$

   b) Si notamos $\overline{M}$ a la variedad M con la orientación opuesta, entonces
   $$\int_{\overline{M}} \omega = -\int_M \omega.$$

   c) Si ω es una n-forma nunca nula orientada positivamente, entonces
   $$\int_M \omega > 0.$$

   d) Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo, entonces
   $$\int_M \omega = \pm \int_N f^*\omega$$
   donde el signo es positivo si f preserva la orientación y es negativo si f la invierte.

6. Sea M una variedad orientada de dimensión n y ω una n-forma de soporte compacto en M. Supongamos que $D_1, \dots, D_k$ son abiertos acotados de $\mathbb{R}^n$ cuyas bordes tienen medida nula y que $\Phi_i : \overline{D_i} \to M$ son funciones continuas que verifican:

   - Φ_i se restringe a un difeomorfismo que preserva la orientación entre D_i y un abierto $W_i \subseteq M$,
   - $W_i \cap W_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, y
   - $\mathrm{Sop}(\omega) \subset \overline{W_1} \cup \dots \cup \overline{W_k}$.

   Probar que
   $$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{D_i} \Phi_i^*\omega.$$

7. *a*) Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la 1-forma

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

y sea $\iota : S^1 \to \mathbb{R}^2$ la inclusión. Calcular $\int_{S^1} \iota^*\omega$.

b) Más generalmente, consideremos en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la $n-1$-forma

$$\omega = \frac{1}{\|x\|^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x_i\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

y sea $\iota : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ la inclusión. Calcular $\int_{S^{n-1}} \iota^*\omega$.

8. Sean M y N dos variedades diferenciales orientadas de dimensión m y n respectivamente, $\omega \in \Omega^m(M), \eta \in \Omega^n(N)$ y $f : M \times N \to \mathbb{R}$ suave de soporte compacto.

a) Probar que la función

$$n \in N \mapsto \int_M f(-, n)\omega \in \mathbb{R}$$

es suave.

b) Probar que

$$\int_{M\times N} f(\pi_M^*(\omega) \wedge \pi_N^*(\eta)) = \int_N \left(\int_M f(-, n)\omega\right)\eta$$

donde $\pi_M : M \times N \to M$ y $\pi_N : M \times N \to N$ son las proyecciones.

9. Sea G un grupo de Lie y, para cada $g \in G$, $L_g : G \to G$ y $R_g : G \to G$ la multiplicación a izquierda y derecha respectivamente.

a) Probar que existe una forma nunca nula invariante a izquierda sobre G, es decir, tal que $L_g^*\omega = \omega$ para todo $g \in G$. La damos a G la orientación definida por ω. Además, si G es compacto, la podemos normalizar de forma tal que $\int_G \omega = 1$.

b) Probar que la integral es invariante a izquierda, es decir que

$$\int_G (f \circ L_g)\omega = \int_G f\omega$$

para todo $g \in G$.

c) Sea $g \in G$. Probar que $R_g^*\omega$ también es una forma invariante a izquierda y concluir que existe una constante $\tilde{\lambda}(g)$ tal que $R_g^*\omega = \tilde{\lambda}(g)\omega$. Probar que $\lambda = |\tilde{\lambda}| : G \to \mathbb{R}_{>0}$ es un morfismo de grupos de Lie. A este morfismo se lo llama la función modular.

d) Probar que la función modular no depende de la forma invariante a izquierda elegida.

e) Probar que la integral es invariante a derecha si y solo si la función modular es constantemente igual a 1. En este caso, diremos que G es unimodular.

f) Probar que si G es compacto, entonces es unimodular.

10. Sean G_1 y G_2 grupos de Lie con formas invariantes a izquierda ω_1 y ω_2 respectivamente.

a) Probar que $\omega = \pi_1^*\omega_1 \wedge \pi_2^*\omega_2$ es una forma invariante a izquierda en $G = G_1 \times G_2$ donde $\pi_i : G \to G_i$ es la proyección canónica.

b) Probar que si G_1 y G_2 son unimodulares, entonces G lo es.

11. Probar que
$$\omega_n = \frac{1}{\det(g)^n} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} dE_{ij}$$
es una forma invariante a izquierda en $GL(n, \mathbb{R})$. Probar que $GL(n, \mathbb{R})$ no es unimodular.

12. *a*) Probar que
$$\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$
es cerrada pero no exacta.

    b) Más generalmente, probar que la $n-1$ forma $\omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por
$$\omega = \frac{1}{\|x\|^n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$
es cerrada pero no exacta.

13. Sea M una variedad compacta y sin borde de dimensión n. Si $\omega \in \Omega^n(M)$ es una forma de volumen, entonces ω no es exacta.

14. Sea C una curva suave en una variedad M parametrizada por $\gamma : [a, b] \to M$. Si ω es una 1-forma en M, definimos la integral de línea de ω a lo largo de C por
$$\int_C \omega := \int_a^b \gamma^* \omega.$$

    a) Probar que la definición no depende de la parametrización elegida: si $\gamma : [c, d] \to M$ es una reparametrización de C, es decir, existe un difeomorfismo $\phi : [c, d] \to [a, b]$ que preserva la orientación tal que $\gamma = \gamma \circ \phi$, entonces
$$\int_a^b \gamma^* \omega = \int_c^d \gamma^* \omega.$$

    b) Si $\omega = df$, donde $f : M \to \mathbb{R}$ es suave y la curva C está orientada de manera que empieza en p y termina en q, entonces
$$\int_C \omega = f(q) - f(p).$$
En particular, la integral no depende de la curva elegida.

15. Sea M una variedad y sea $\omega \in \Omega^k(M)$ cerrada.

    a) Si $\iota : S \to M$ es un función suave desde una variedad de dimensión k compacta, sin borde y orientada tal que existe una variedad T con $S = \partial T$ y una extensión de ι a T, entonces
$$\int_S \iota^* \omega = 0.$$

    b) Si $\iota : W \to M$ es una función suave desde una variedad compacta y orientada tal que $\partial W = S \sqcup T$, con S y T dotadas de la orientación inducida por W, entonces
$$\int_S \iota^* \omega = -\int_T \iota^* \omega.$$

16. Si M es una variedad compacta, orientada y con borde, no existe una retracción diferenciable $M \to \partial M$.

17. Sea M una variedad orientada y $\mathrm{Vol} \in \Omega^n(M)$ una forma de volumen que induce la orientación dada. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo.

    a) Probar que existe una única función suave $\mathrm{div}(X)$ tal que
    $$d(\iota_X(\mathrm{Vol})) = \mathrm{div}(X)\mathrm{Vol}.$$

    b) Si M es $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Vol} = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ y $X = \sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ demuestre que $\mathrm{div}(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^i}$.

    c) Si M es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\mathrm{Vol}_g = \sqrt{g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, donde $\sqrt{g} \in C^\infty(M)$ es un a función positiva y $X = \sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, calcule $\mathrm{div}(X)$.

    d) Probar que
    $$\mathrm{div}(fX) = f\,\mathrm{div}(X) + X(f)$$
    para toda $f \in C^\infty(M)$.

    e) Probar que
    $$\mathrm{div}([X,Y]) = X(\mathrm{div}(Y)) - Y(\mathrm{div}(X)).$$
    para todo campo Y.

18. Sean M una variedad con borde, $S = \partial M$ con la orientación inducida por la de M y $X \in \mathfrak{X}_c(M)$ un campo con soporte compacto. Fijemos una forma de volumen Vol en M. Se define la integral de flujo de X a través de S como
    $$\int_S X \cdot d\vec{S} := \int_S i^*(\iota_X(\mathrm{Vol}))$$
    donde $i : S \to M$ es la inclusión.

    a) Probar que
    $$\int_S X \cdot \vec{d}S = \int_M \mathrm{div}(X)\mathrm{Vol}.$$

    b) Si M es un dominio de $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Vol} = dx \wedge dy \wedge dz$ y $X = P\partial_x + Q\partial_y + R\partial_z$, calcular $i^*(\iota_X(\mathrm{Vol}))$.

    c) Recuperar el teorema de la divergencia.