Geometría Diferencial

Primer cuatrimestre - 2025

Práctica 4

---

1. Sea $f : M \to N$ una función suave. Se define el pullback $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ como

$$(f^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{f(p)}(d_p f(v_1), \dots, d_p f(v_k))$$

para cada $p \in M$.

   a) Probar que f^* está bien definido (es decir, probar que $f^*\omega$ es una k-forma).

   b) Probar que si $f : M \to N$, $g : N \to P$ son suaves, entonces $(g \circ f)^*\omega = f^*g^*\omega$ para toda $\omega \in \Omega^k(P)$.

   c) Probar que $f^*(h \cdot \omega) = (h \circ f) \cdot f^*(\omega)$ si $w \in \Omega^k(N)$ y $h \in C^\infty(N)$.

   d) Probar que $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$ si ω y η son formas de N.

   e) Probar que si (U, φ) es una carta, entonces $\varphi^*(dx_i) = d\varphi_i$.

2. Si U y V son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to V$ es diferenciable, entonces

$$f^*(dx_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_k$$

y

$$f^*(g \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = g \circ f \cdot \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y cada $g \in C^\infty(V)$.

3. Sea M una variedad diferenciable y (U, φ), (V, ψ) dos cartas. Probar que

$$d\psi_1 \wedge \cdots \wedge d\psi_n = \det(D(\psi \circ \varphi^{-1}))d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_n$$

4. Sean $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Omega^1(M)$ y $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$. Probar que

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r)(X_1, \dots, X_r) = \det(\omega_i(X_j))$$

5. Sea $\omega \in \Omega^k(M)$ y $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$. Probar la fórmula

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1})$$

6. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se define la contracción por X, $\iota_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$, como

$$\iota_X \omega(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1})$$

para cualesquiera $X_1, \dots, X_{k-1} \in \mathfrak{X}(M)$. Probar que

a) ι_X esta bien definido y es $C^\infty(M)$-lineal.

b) si $\omega_1 \in \Omega^k(M)$ y $\omega_2 \in \Omega^l(M)$,

$$\iota_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = \iota_X\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \iota_X\omega_2.$$

c) si Y es otro campo, $\iota_X \circ \iota_Y = -\iota_Y \circ \iota_X$.

d) si (U, φ) es una carta y $X\big|_U = \sum X_i \partial_i$,

$$\iota_X(d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j X_{i_j} d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{d\varphi_{i_j}} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}$$

para cualesquiera $i_1, \ldots, i_k$.

7. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo diferenciable en el sentido clásico.

   a) Demostrar que $\omega^1_F(x)(v) = \langle F(x), v\rangle$ define una 1-forma en $\mathbb{R}^3$. Encontrar las coordenadas de ω^1_F en la base $\{dx, dy, dz\}$. Recíprocamente, si ω es una 1-forma en $\mathbb{R}^3$, probar que ω determina un único campo G en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega = \omega^1_G$.

   b) Demostrar que $\omega^2_F(x)(v, w) = \langle F(x), v \times w\rangle$ define una 2-forma en $\mathbb{R}^3$. Calcular sus coordenadas en la base $\{dx \wedge dy, dz \wedge dx, dy \wedge dz\}$. Recíprocamente, probar que toda 2-forma ω define un único campo G en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega^2_G = \omega$.

   c) Probar que

   $$d\omega^1_F = \omega^2_{\nabla \times F}$$

   y

   $$d\omega^2_F = (\nabla \cdot F) dx \wedge dy \wedge dz.$$

   Deducir la fórmula $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$.

   d) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función suave. Deducir la fórmula $\nabla \times (\nabla f) = 0$

8. Sea M una variedad. Decimos que una forma $\omega \in \Omega^k(M)$ es *cerrada* si $d\omega = 0$ y que es *exacta* si existe una forma $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $d\eta = \omega$.

   a) Una forma exacta es cerrada.

   b) Si ω y ω' son formas cerradas y ω'' es exacta, entonces $\omega \wedge \omega'$ es cerrada y $\omega \wedge \omega''$ es exacta.

   c) Si $f : M \to N$ es una función diferenciable entre variedades y $\omega \in \Omega^\bullet(N)$ es una forma cerrada (exacta), entonces $f^*(\omega)$ es cerrada (exacta).

9. Sea M una variedad diferencial de dimensión n. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) Para cada $p \in M$ existe una orientación $o(p)$ del espacio tangente T_pM que varía suavemente con $p \in M$.

   b) Existe un atlas orientado de M, es decir, un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ tal que $\det(D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})) > 0$ para todo α, β.

   c) Existe una n-forma ω nunca nula en M, es decir, $\omega_p \neq 0$ para cada $p \in M$.

10. Sea M una variedad de dimensión n y sean $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^n(M)$ dos n-formas sobre M que no se anulan en ningún punto.

a) Para cada $\omega \in \Omega^n(M)$ existe una única función $f \in C^\infty(M)$ tal que $\omega = f \cdot \omega_1$.

b) Las formas ω_1 y ω_2 inducen la misma orientación de M si y solo si la función $f \in C^\infty(M)$ tal que $\omega_1 = f \cdot \omega_2$ es positiva.

11. Probar que
$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$$
es una n-forma en $\mathbb{R}^{n+1}$ y que si $S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ es la inclusión, entonces $i^*\omega$ es una forma de volumen. Más aun, $\omega = \iota_X(\mathrm{Vol})$ donde $\mathrm{Vol} = dx_1 \wedge ... \wedge dx_{n+1}$ es la forma de volumen estándar en $\mathbb{R}^{n+1}$ y $X = \sum x_i \partial_i$.

12. Una variedad que posee un atlas con exactamente dos cartas cuyos dominios se intersecan en un conexo es orientable. ¿Puede relajar alguna de estas hipótesis manteniendo la conclusión?

13. Si M es una variedad de dimensión dos que tiene un atlas tal que todas las funciones de transición correspondientes son funciones holomorfas, entonces M es orientable.

14. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $F : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $p \in \mathbb{R}$ un valor regular. Probar que $F^{-1}(p)$ es orientable.

15. Si M es una variedad, entonces las variedades TM y T^*M son orientables.

16. Una variedad paralelizable es orientable. En particular, un grupo de Lie es orientable.

17. Si M y N son variedades no vacías, entonces $M \times N$ es orientable si y solo si M y N lo son.

18. *El revestimiento de orientaciones* Sea M una variedad, sea $\tilde{M}$ el conjunto de pares (x, o) con $x \in M$ y o una orientación de T_xM y sea $p : \tilde{M} \to M$ la función tal que $p(x, o) = x$ para todo $(x, o) \in \tilde{M}$.

    a) Muestre que $\tilde{M}$ es, de manera natural, una variedad. Con respecto a esa estructura, la función $p : \tilde{M} \to M$ es un revestimiento diferenciable de dos hojas.

    b) La variedad $\tilde{M}$ es orientable.

    c) La variedad M es orientable si y solamente si existe una función diferenciable $s : M \to \tilde{M}$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_M$.

    d) Una variedad simplemente conexa es orientable.

    e) Una variedad conexa cuyo grupo fundamental no contiene subgrupos de índice 2 es orientable.

19. Sean M, N variedades orientadas y $f : M \to N$ un difeomorfismo local. Decimos que f preserva la orientación en p si $d_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ es un isomorfismo de espacios vectoriales orientados.

    a) Sean (U, φ) y (V, ψ) cartas positivas de M y N respectivamente. Sea $p \in U$. Demostrar que f preserva la orientación en p si y solo si $\det(D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})) > 0$

    b) Probar que si ω_M y ω_N definen las orientaciones de M y N respectivamente y $(f^*\omega_N)_p = \varphi(p)\omega_{M_p}$, f preserva la orientación en p si y solo si $\varphi(p) > 0$.

20. Sea M una variedad diferenciable conexa y orientada y G un grupo discreto actuando en M de forma propiamente discontinua por difeomorfismos tal que el cociente M/G es Hausdorff. Probar que M/G es orientable si y sólo si para cada $g \in G$ el difeomorfismo $p \mapsto g \cdot p$ preserva la orientación.

21. Probar que la banda de Möbius y la botella de Klein no son orientables.

22. Probar que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es orientable si y solo si n es impar.

23. Sea M una variedad diferenciable conexa de dimensión 1.

    a) Probar que, si M es orientable, admite un campo tangente nunca nulo.

    b) Probar que, si M es orientable, es difeomorfa a S^1 o a $\mathbb{R}$.

    c) Probar que todo difeomorfismo $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que invierte la orientación tiene un punto fijo.

    d) Probar que M es orientable y concluir que es difeomorfa a S^1 o a $\mathbb{R}$.
    Sugerencia: Considerar el revestimiento universal de M.

24. Una variedad simpléctica (M, ω) es una variedad M de dimensión $2n$ provista de una 2-forma cerrada ω no degenerada (es decir, para todo $p \in M$ y $v \in T_pM$, existe $w \in T_pM$ tal que $\omega_p(v, w) \neq 0$). Probar que toda variedad simpléctica (M, ω) es orientable.

25. Sea M una variedad diferencial de dimensión n y T^*M su fibrado cotangente.

    a) Sea (U, φ) una carta de M y $\overline{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, d\varphi_1, \ldots, d\varphi_n)$ la carta $\overline{\varphi} : T^*U \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ inducida por (U, φ). Tomamos la 2-forma en T^*U dada por

    $$\sum_{i=1}^{n} d\overline{\varphi}_i \wedge d\overline{\varphi}_{n+i}.$$

    Probar que esta forma no depende de la carta (U, φ) y deducir que esta construcción define una 2-forma global ω en T^*M.

    b) Probar que (T^*M, ω) es simpléctica.