

Geometría Diferencial

Primer cuatrimestre - 2025

Práctica 3

1. Sea M una variedad, $p \in M$ y $v \in T_p M$ un vector tangente. Probar que existe un campo $X \in \mathfrak{X}(TM)$ tal que $X(p) = v$.
2. Sea $p \in M$ y X un campo definido en un entorno de p tal que $X(p) \neq 0$. Probar que existe una carta (U, φ) tal que $X|_U = \partial_1$.
3. Sean $p \in M$ y $X_1, \dots, X_k$ campos definidos en un entorno de p tales que los vectores $X_1(p), \dots, X_k(p)$ son linealmente independientes en $T_p M$. Probar que existe un entorno U de p tal que $\{X_1(q), \dots, X_k(q)\}$ es un conjunto linealmente independiente para todo $q \in U$.
4. Sea G un grupo de Lie y notemos $L_g : G \rightarrow G$ el difeomorfismo $L_g(h) = gh$. Decimos que un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ es invariante a izquierda si se tiene

$$(d_h L_g)(X(h)) = X(gh)$$

para todos $g, h \in G$.

- a) Probar que si dos campos invariantes a izquierda coinciden en un punto, entonces coinciden en todo G .
 - b) Exhibir un isomorfismo entre $T_e(G)$ y el espacio de campos invariantes a izquierda.
 - c) Probar que todo grupo de Lie es paralelizable.
5. Sea γ una curva integral de un campo X definido sobre M . Probar que si $\dot{\gamma}(t) = 0$ para algún t , entonces γ es constante.
 6. Calcular las curvas integrales y describir el flujo definido por el campo X en cada uno de los siguientes casos.
 - a) $X = -y\partial_x + x\partial_y$ definido sobre $\mathbb{R}^2$.
 - b) $M = T^2$ y $X = \partial_1 + \sqrt{2}\partial_2$, donde ∂_1 y ∂_2 vienen de la estructura de producto de $T^2 = S^1 \times S^1$.
 - c) $M = S^2$ y X la restricción a M del campo $-zy\partial_x + zx\partial_y$ en $\mathbb{R}^3$.
 - d) $M = S^2$ y X la restricción a M del campo $(z - y)\partial_x + x\partial_y - x\partial_z$ en $\mathbb{R}^3$.
 - e) Sea $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz real y considere sobre $\mathbb{R}^n$ el campo vectorial $X = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i \partial_{x_j}$.
 7. Sea M una variedad y $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo.
 - a) Si existe $\epsilon > 0$ fijo tal que para todo $p \in M$ la curva integral de X que pasa por p está definida en $(-\epsilon, \epsilon)$, probar que X es completo (es decir, el dominio maximal de toda curva integral es $\mathbb{R}$).
 - b) Probar que si $\text{Sop}(X) = \overline{\{p \in M : X(p) \neq 0\}}$ es compacto, entonces X es completo.
 - c) Probar que si M es compacta, X es completo.

8. Sea G un grupo de Lie y X un campo vectorial invariante a izquierda. Pruebe que X es completo.
9. Sea M una variedad diferenciable conexa y sea $\text{Diff}(M)$ el grupo de los difeomorfismos $M \rightarrow M$.
- a) La función
- $$(f, p) \in \text{Diff}(M) \times M \mapsto f(p) \in M$$
- define una acción del grupo $\text{Diff}(M)$ sobre M por difeomorfismos.
- *b) La acción de $\text{Diff}(M)$ sobre M es transitiva.
- *c) Si $\dim M \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ y $p_1, \dots, p_m$ y $q_1, \dots, q_m$ son puntos de M tales que $p_i \neq p_j$ y $q_i \neq q_j$ siempre que $i \neq j$, entonces existe un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ tal que $f(p_i) = q_i$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.
10. Sea $f : M \rightarrow N$ diferenciable. Dos campos $X \in \mathfrak{X}(M), Y \in \mathfrak{X}(N)$ se dicen f -relacionados si $Y(f(p)) = d_p f(X(p))$ para todo $p \in M$, es decir, si $Y = (df)(X)$. Lo denotamos $X \sim_f Y$.
- a) Sea $g : N \rightarrow P$ diferenciable. Probar que si $X \sim_f Y$ y $Y \sim_g Z$, entonces $X \sim_{g \circ f} Z$.
- b) Probar que X e Y están f -relacionados si y solo si para toda γ curva integral de X se tiene que $f \circ \gamma$ es curva integral de Y .
- *11. Sea $f : M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ diferenciable, propia, sobreyectiva y tal que todo $t \in U$ es valor regular.
- a) Probar que existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X \sim_f \frac{\partial}{\partial x^i}$. ¿Es X único?
- b) Sea X como en el ítem anterior. Probar que X es completo.
- c) Probar que $f^{-1}(t)$ es difeomorfo a $f^{-1}(t')$ para cualesquiera $t, t' \in U$.
- d) Sea $p \in U$. Probar que existe un abierto $V \subset U$ y un difeomorfismo $\varphi : f^{-1}(V) \rightarrow f^{-1}(p) \times V$ tal que $f|_{f^{-1}(V)} = \pi \circ \varphi$, donde π es la proyección en la segunda coordenada.
12. Sea M una variedad diferenciable y sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos. El corchete de Lie se define como
- $$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) = (X \circ Y - Y \circ X)(f)$$
- para toda $f \in C^\infty(M)$ pensando a los campos como derivaciones.
- a) Probar que $[X, Y]$ es una derivación.
- b) Mostrar con un ejemplo que $X \circ Y$ no es necesariamente una derivación.
- c) Probar que si (U, φ) es una carta de M y

$$X = \sum_{i=1}^n x^i \partial_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n y^i \partial_i$$

entonces

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (x^j \partial_j y^i - y^j \partial_j x^i) \right) \partial_i.$$

13. Sea (U, φ) una carta de una variedad M . Probar que $[\partial_i, \partial_j] = 0$ para cualesquiera i, j .
14. Dados campos X, Y en una variedad M y funciones suaves $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ probar la fórmula de Lie-Rinehart:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$$

15. Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable y $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ campos con $X_1 \sim_f Y_1$ y $X_2 \sim_f Y_2$. Probar que $[X_1, X_2] \sim_f [Y_1, Y_2]$.

16. Sea M una variedad diferenciable y X e Y dos campos sobre ella. Sean Φ^X y Φ^Y sus respectivos flujos.

a) Probar que la función $(s, p) \mapsto \Phi_{-t}^X(\Phi_s^Y(\Phi_t^X(p)))$ define un flujo cuyo campo asociado Z^t es $p \mapsto (d_{\Phi_t^X(p)} \Phi_{-t}^X)(Y(\Phi_t^X(p)))$.

b) Probar que

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t_0} Z^t(p) = \left(d_{\Phi_{t_0}^X(p)} \Phi_{-t_0}^X \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_0 Z^t(\Phi_{t_0}^X(p)) \right)$$

para todo $p \in M$, donde la derivada respecto a t la calculamos pensando a $Z^t(p)$ como una curva en TM .

c) Sean $f \in C^\infty(M)$ y $p \in M$. Consideremos la función $F(t_1, t_2) = Y_{\Phi_{t_1}^X(p)}(f \circ \Phi_{-t_2}^X)$ cuyo dominio es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y su codominio es $\mathbb{R}$. Probar que

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_0 Z^t(f) = \frac{\partial F}{\partial t}(0, 0).$$

d) Probar que

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_0 Z^t(p) = [X, Y](p).$$

e) Probar que Φ_t^X y Φ_s^Y conmutan para cualesquiera t, s si y solo si $[X, Y] = 0$.

17. Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial V junto con una aplicación bilineal $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ satisfaciendo las siguientes dos condiciones:

- Antisimetría: $[X, Y] = -[Y, X]$ para cualesquiera $X, Y \in V$.
- Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ para cualesquiera $X, Y, Z \in V$.

Probar que $\mathfrak{X}(M)$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$.

18. Probar que si G es un grupo de Lie y X, Y son campos invariantes a izquierda entonces $[X, Y]$ es invariante a izquierda. Deducir que $T_e G$ hereda una estructura de álgebra de Lie.

19. Sea $G = GL(n, \mathbb{R})$. Probar que para todas $A, B \in T_e G \cong M_n(\mathbb{R})$ se tiene que

$$[X_A, X_B] = X_{[A, B]},$$

donde $[A, B] = AB - BA$ y $X_A(M) = MA$ es el campo invariante a izquierda asociado a A .

20. Muestre que el conjunto

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

es un subgrupo de Lie de $GL(2, \mathbb{R})$ que tiene a la función

$$\phi : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \mapsto (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

como carta global. Con respecto al sistema de coordenadas correspondiente a esta carta, consideremos un campo $X = f(a, b)\partial_a + g(a, b)\partial_b \in \mathfrak{X}(G)$. ¿Qué condiciones tienen que satisfacer las funciones $f, g \in C^\infty(G)$ para que X sea un campo vectorial invariante a izquierda? ¿Y a derecha? Determine la estructura de Lie del álgebra de Lie de G .

21. Sea G un grupo de Lie y e su elemento neutro.

- a) Si $v \in T_e G$ es un vector tangente a G en e y $X \in \mathfrak{X}(G)$ es el único campo vectorial invariante a izquierda tal que $X_e = v$, sea $\gamma_v : \mathbb{R} \rightarrow G$ la única curva integral de X tal que $\gamma_v(0) = e$. Entonces γ_v es un homomorfismo de grupos, esto es,

$$\gamma_v(t + t') = \gamma_v(t) \cdot \gamma_v(t'), \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}.$$

- b) Definimos una función $\exp : T_e G \rightarrow G$ poniendo, para cada $v \in T_e G$,

$$\exp(v) = \gamma_v(1).$$

Determine la diferencial $d_0 \exp : T_e G \rightarrow T_e G$ y muestre que $\exp$ es localmente un difeomorfismo alrededor de 0.

- c) Muestre que si $v, w \in T_e G$ son tales que $[v, w] = 0$, entonces

$$\exp(v + w) = \exp(v) \cdot \exp(w).$$

22. Sea $G = GL(n, \mathbb{R})$. Recordemos que podemos identificar $T_I G$ con $M_n(\mathbb{R})$.

- a) Muestre que la función $\exp : T_e G \rightarrow G$ coincide con la exponencial matricial:

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

- b) Muestre que $\exp : T_e G \rightarrow G$ no es un homomorfismo de grupos.