Geometría Diferencial

Primer cuatrimestre - 2025

Práctica 2

---

1. Sea M una variedad diferencial de dimensión n y $p \in M$ un punto. Probar que las siguientes descripciones del espacio tangente a M en p son equivalentes:

   a) Derivaciones en p sobre el espacio de funciones suaves:
   $$T_pM = \{D : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)\}.$$

   b) Derivaciones en p sobre el espacio de gérmenes de funciones:
   $$T_pM = \{D : \mathbb{C}^\infty(M)_p \to \mathbb{R} : D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)\}.$$

   c) El espacio dual de $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, donde $\mathfrak{m}_p$ es el ideal de funciones diferenciables que se anulan en p.

   d) El espacio dual de $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, donde $\mathfrak{m}_p$ es el ideal de gérmenes de funciones diferenciables en p que se anulan en p.

   e) Familias de ternas (U, φ, v) con (U, φ) carta de M alrededor de p y $v \in \mathbb{R}^n$ bajo la relación de equivalencia
   $$(U, \varphi, v) \sim (V, \psi, w) \iff v = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot w.$$

   Para cada una de las descripciones, determinar el diferencial de una función suave.

2. Sean M una variedad diferencial, $p \in M$ un punto, y (U, φ) una carta de M alrededor de p. Dadas dos curvas $\gamma_1 : I_1 \to M$, $\gamma_2 : I_2 \to M$, donde $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ son intervalos que contienen a 0 y $\gamma_i(0) = p$, diremos que γ_1 y γ_2 son equivalentes (y notamos $\gamma_1 \sim \gamma_2$) si y solo si
   $$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0).$$

   Probar que

   a) $\sim$ es una relación de equivalencia.

   b) $\sim$ no depende de la carta elegida.

   c) El conjunto de clases de equivalencia puede ser dotado de una estructura de espacio vectorial que resulta isomorfo al espacio tangente T_pM.

   d) Definir la diferencial de una función en términos de esta construcción.

3. Sea $SL_2(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^4$ el conjunto de matrices de determinante uno. Dar ecuaciones en $\mathbb{R}^8$ que definan $T\,SL_2(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^8$.

4. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Sea $TM = \bigcup_{p\in M}\{p\} \times T_pM$ y sea $\pi : TM \to M$ la función tal que $\pi(v) = p$ si $v \in T_pM$. Para cada carta (U, φ), sea $TU = \bigcup_{p\in U}\{p\} \times T_pM \subset TM$ y $\overline{\varphi} : TU \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ la función tal que
   $$\overline{\varphi}(v) = \left(\varphi(\pi(v)), v\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\Big|_p\right), \ldots, v\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_n}\Big|_p\right)\right)$$
   cada vez que $v \in TU$.

a) La función $\overline{\varphi} : TU \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ es una biyección con inversa

$$\overline{\varphi}^{-1}(a, b^1, \dots, b^n) = \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_{\varphi^{-1}(a)}$$

para cada $(a, b^1, \dots, b^n) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$.

b) Si $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ y $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $\overline{\varphi}(TU \cap TV) \times \mathbb{R}^n$ es un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$ y la biyección $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi}^{-1} : \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo.

c) El conjunto TM admite una estructura diferenciable que lo transforma en una variedad diferenciable de dimensión $2n$, con atlas

$$\overline{\mathcal{A}} = \{(TU, \overline{\varphi}) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}.$$

donde $\mathcal{A}$ es el atlas maximal de M.

d) Con respecto a esta estructura, la proyección $\pi : TM \to M$ es diferenciable.

5. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable. La aplicación $df : TM \to TN$, $(p, v) \mapsto (f(p), d_p f(v))$, es diferenciable.

6. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y (U, φ) una carta de M. Sean $p \in U$ y $a = \varphi(p)$. Entonces la aplicación $d_a(\varphi^{-1}) : T_a\mathbb{R}^n \to T_pM$ es tal que

$$d_a(\varphi^{-1})\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_a\right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_p$$

para todo $1 \leqslant i \leqslant n$.

7. Sean M una variedad de dimensión n, $\pi : TM \to M$ la proyección natural y $v \in TM$. Calcular, para todo $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$d_v\pi\left(\frac{\partial}{\partial \overline{\varphi}_i}\Big|_v\right)$$

si $(TU, \overline{\varphi})$ es la carta de TM asociada a una carta (U, φ) de M alrededor de $\pi(v)$.

8. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : U \to \mathbb{R}$ una función suave con 0 como valor regular, $M = f^{-1}(0)$, y $p \in M$. Probar que la inclusión de M en $\mathbb{R}^n$ permite identificar T_pM con el complemento ortogonal a $\nabla_p f$ en $\mathbb{R}^n$.

9. Sean M, N variedades diferenciales y $p \in M$, $q \in N$ dos puntos. Consideremos las inclusiones $\iota : U \hookrightarrow M$, $\iota' : V \hookrightarrow N$, donde $\iota(x) = (x, q)$ y $\iota'(y) = (p, y)$. Probar que:

$$T_{(p,q)}(M \times N) = d\iota_p(T_pM) \oplus d\iota'_q(T_qN).$$

10. Probar que las siguientes funciones son diferenciables y calcular su diferencial en los puntos indicados.

a) $f : S^n \to S^n_\rho$ con $f(u) = \rho u$ en cualquier punto;

b) $f : E \to F$, una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita dotados de su estructura usual de variedades, en cualquier punto;

c) $g : S^1 \to S^1$ dada por $g(z) = z^n$ con $n \in \mathbb{N}$ en cualquier punto;

d) $f : S^1 \times (-1, 1) \to S^2$ dada por $f(x, y, t) = (x\sqrt{1-t^2}, y\sqrt{1-t^2}, t)$ en los puntos de la forma $(1, t)$;

e) $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dada por $f([x : y : z]) = [z : x : y]$ en cualquier punto;

f) $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ en cualquier punto;

g) El producto de matrices $f : M_{n,k}(\mathbb{R}) \times M_{k,m}(\mathbb{R}) \to M_{n,m}(\mathbb{R})$;

h) La inversa de matrices $\iota : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ en la matriz identidad;

i) Las restricciones de las funciones de los dos ítems anteriores a $SL(n, \mathbb{R})$ en la identidad.

11. Sean M y N variedades diferenciables y sea $f : M \to N$ una función diferenciable.

    a) Si f es constante, entonces $d_p f = 0$ para todo $p \in M$.

    b) Si M es conexa y $d_p f = 0$ para todo $p \in M$, entonces f es constante.

12. Sean M una variedad y $f \in C^\infty(M)$. Si f tiene un máximo local en $p \in M$, entonces $d_p f = 0$.

13. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable. Sea $q \in N$ un valor regular de f. Probar que $P := f^{-1}(q)$ admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión $\dim M - \dim N$ tal que la inclusión $P \to M$ es diferenciable e identifica $T_p P$ con $\ker d_p f$, para todo $p \in P$.

14. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable entre variedades de la misma dimensión y supongamos que su dominio es compacto.

    a) Para cada $q \in N$ que es un valor regular de f el conjunto $f^{-1}(q)$ es finito.

    b) Sea R el conjunto de los valores regulares de f. El conjunto R es un abierto de N y la función
    $$q \in R \mapsto \#f^{-1}(q) \in \mathbb{N}_0$$
    es localmente constante. ¿Es necesariamente constante?

15. Probar que: $f : M \to N$ es un difeomorfismo en un entorno de $p \in M$ si y solo si $d_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ es un isomorfismo.

16. Sean M una variedad de dimensión n, $U \subset M$ abierto, $p \in U$, y $\varphi_1, \dots, \varphi_n : U \to \mathbb{R}$ diferenciables tales que $d_p \varphi_1, \dots, d_p \varphi_n$ son linealmente independientes en $(T_p M)^*$. Probar que la función $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ es una carta de M en un entorno de p.

17. Chequear que los siguientes subgrupos $H \subset G$ son subgrupos de Lie, es decir, que H es un grupo de Lie y la inclusión $H \to G$ es morfismo de grupos, diferenciable y cerrada.

    a) $SL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$,

    b) $SO_n(\mathbb{R}) \subset SL_n(\mathbb{R})$, y

    c) $T_n = \{\text{matrices triangulares superiores}\} \subset GL_n(\mathbb{R})$.

18. Sea $T^2 = S^1 \times S^1$. Para cada $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ hay un morfismo de grupos $\iota : R \to T^2$ dado por
    $$\iota(x) = (e^{2\pi i a x}, e^{2\pi i b x}).$$
    Probar que si $(a, b) \neq (0, 0)$, entonces el diferencial de ι es inyectivo, y si a/b no es racional, ι es inyectivo, pero la imagen no es cerrada en T^2 (es densa).

19. Sea G un grupo de Lie y $H \subset G$ un subgrupo de Lie Sea $\pi : G \to G/H$ la proyección al cociente. Probar que

    a) π es abierta.

    b) G/H es Hausdorff y N_2.

*c) Existe una subvariedad $S \subset G$ que contiene al neutro tal que $f : S \times H \to G$, $(s, h) \mapsto sh$, es un difeomorfismo con un abierto de G.

d) G/H admite una estructura de variedad diferenciable tal que π es suave y se tiene que

si M es una variedad diferenciable, entonces una función $f : G/H \to M$ es diferenciable si y solamente si la composición $f \circ \pi : G \to M$ es diferenciable.

20. Sea $n \geqslant 1$ un entero y

$$F := \left\{ (V_0, \ldots, V_n) \in \prod_{k=0}^{n} \mathrm{Gr}(k, n) : V_k \subset V_{k+1} \ \forall \, 0 \leqslant k < n \right\}$$

la variedad de banderas de $\mathbb{R}^n$. Probar que F admite una estructura de variedad diferenciable y hallar su dimensión.

21. Sea M una variedad diferenciable. Probar que la proyección natural $\pi : TM \to M$ es un fibrado vectorial.

22. Probar que el cilindro y la banda de Möbius infinita son fibrados vectoriales de rango 1 sobre S^1 no isomorfos entre sí.

    Sugerencia: Cortar un cilindro de papel "por la mitad" y hacer lo mismo con la banda de Möbius. Esto equivale a remover la imagen de la sección nula.

23. Sea M una variedad diferencial y $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial de rango k. Probar que $\pi : E \to M$ es isomorfo al fibrado trivial si y solo si existen k secciones $s_1, \ldots, s_k$ tal que $\{s_1(p), \ldots, s_k(p)\}$ es una base de E_p para todo $p \in M$.

24. Decimos que una variedad es *paralelizable* si su fibrado tangente es trivial. Probar que S^1, S^3 y $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ son paralelizables, mientras que S^2 no lo es.

25. Definimos sobre el espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ el *Fibrado Tautológico* de la siguiente manera: como conjunto es

$$\mathcal{T} = \{([v], p) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1} : p \in \langle v \rangle\}$$

y el morifsmo $\pi : \mathcal{T} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es la proyección en la primera coordenada.

a) Probar que $\pi : \mathcal{T} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ admite estructura de fibrado vectorial. Calcular el rango, hallar un cubrimiento por abiertos trivializantes y calcular las funciones de transición.

*b) Probar que es un fibrado no trivial.
Sugerencia: Probar que toda sección debe anularse en algún punto.