Geometría Diferencial

Primer cuatrimestre - 2025

Práctica 1

---

1. Sea V un espacio vectorial real de dimensión $n \geqslant 1$ y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Sea $\phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \to V$ la función tal que $\phi_{\mathcal{B}}(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i v_i$ para cada $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$.

   a) Hay una única topología que hace que $\phi_{\mathcal{B}}$ sea un homeomorfismo y esa topología no depende de la base $\mathcal{B}$ elegida.

   b) El conjunto $\mathcal{A}_{\mathcal{B}} = \{(V, \phi_{\mathcal{B}}^{-1})\}$ es un atlas sobre V y la estructura diferenciable que determina no depende de la base $\mathcal{B}$ elegida.

2. *a)* Si M es una variedad de dimensión n y $N \subseteq M$ es un abierto no vacío, entonces N tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión n.

   **b)* Probar que un subconjunto $S \subseteq M$ (con la topología de subespacio) es una variedad de dimensión n si y solo si S es abierto en M.

3. Construya explícitamente un atlas sobre los siguientes espacios topológicos:

   a) el cilindro $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$;

   b) el toro $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ factores}}$;

   c) los espacios proyectivos $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

4. *a)* El conjunto de vectores normales unitarios a una curva regular C en $\mathbb{R}^3$, es decir,

   $$NU(C) := \{(p, n) \in C \times S^2 : n \perp T_p C\},$$

   tiene una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión 2.

   b) Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una función diferenciable que tiene a 0 como valor regular, de manera que el conjunto $M = F^{-1}(0)$ es una variedad. Muestre que el conjunto

   $$SM := \{(m, v) \in M \times S^{n-1} : \langle v, \nabla_m F \rangle = 0\}$$

   de vectores unitarios tangentes a M tiene una estructura natural de variedad de dimensión $2n - 3$.

5. Muestre que los siguientes espacios son variedades diferenciales y determine sus dimensiones.

   a) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, la esfera;

   b) $GL(n, \mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$, el conjunto de las matrices complejas $n \times n$ inversibles;

   c) $SL(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$, el conjunto de las matrices reales $n \times n$ de determinante 1;

   d) $O(n, \mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{R})$, el conjunto de las matrices reales $n \times n$ que son ortogonales, esto es, las matrices A tales que $AA^t = I$.

   e) $U(n) \subseteq M_n(\mathbb{C})$, el conjunto de las matrices complejas $n \times n$ que son unitarias, esto es, las matrices A tales que $AA^* = I$.

f) $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, el conjunto de las matrices $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ tales que $A\Omega A^t = \Omega$, con

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

y el conjunto $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ definido de manera similar, pero empezando con matrices con coeficientes complejos.

6. Sea M una variedad diferencial de dimensión d.

   a) Probar que M admite un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ tal que para todo i en I se tiene que $\phi_i(U_i)$ es un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$.

   b) Probar que M admite un atlas $\tilde{\mathcal{A}} = \{(V_i, \psi_i) : i \in I\}$ tal que para todo i en I se tiene que $\psi_i(V_i) = \mathbb{R}^d$.

7. Sea $M = \mathbb{R}$.

   a) Los conjuntos $\mathcal{A} = \{(M, \mathrm{id} : M \to \mathbb{R})\}$ y $\mathcal{A}' = \{(M, \phi : t \in M \mapsto t^3 \in \mathbb{R})\}$ son dos atlas sobre M que no son compatibles, de manera que los atlas maximales que los contienen son distintos y determinan variedades diferenciales $(M, \mathcal{A})$ y $(M, \mathcal{A}')$ distintas.

   b) Las variedades diferenciales $(M, \mathcal{A})$ y $(M, \mathcal{A}')$ son difeomorfas.

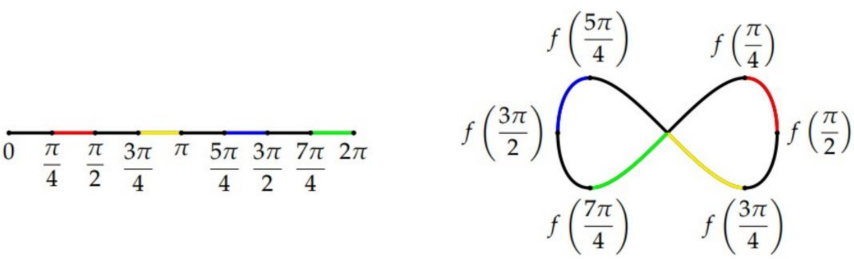
8. La función

$$(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mapsto (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

   es diferenciable. Pruebe que S^1 y $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ son variedades difeomorfas.

9. Las variedades $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ y $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ son grupos de Lie cuando las dotamos del producto dado por la multiplicación matricial.

10. Sea M la imagen de la función $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ donde $f(t) = (\sin(t), \sin(2t))$ y démosle la estructura inducida por la carta (M, f^{-1}). Probar que la función $F : M \to M$ definida por $F(x, y) = (x, -y)$ no es diferenciable.



11. Sean M y N variedades de dimensiones m y n, respectivamente.

    a) El espacio producto $M \times N$ tiene una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión $m + n$ y con respecto a esta estructura las proyecciones $p_1 : M \times N \to M$ y $p_2 : M \times N \to N$ son funciones diferenciables.

    b) Si P es una variedad y $f : P \to M$ y $g : P \to N$ son funciones diferenciables, entonces existe exactamente una función diferenciable $h : P \to M \times N$ tal que $p_1 \circ h = f$ y $p_2 \circ h = g$.

c) La función $\Delta : x \in M \mapsto (x, x) \in M \times M$ es diferenciable.

12. Sean M_1, M_2 variedades diferenciales de la misma dimensión. Sean $U_1 \subseteq M_1$ y $U_2 \subseteq M_2$ abiertos y $f : U_1 \to U_2$ un difeomorfismo tal que

- para todo $p \in \partial U_1$ existe un abierto $V_1 \subseteq M_1$ que contiene a p y $\overline{f(V_1 \cap U_1)} \subseteq U_2$,
- para todo $q \in \partial U_2$ existe un abierto $V_2 \subseteq M_2$ que contiene a q y $\overline{f^{-1}(V_2 \cap U_2)} \subseteq U_1$.

Consideramos en $M_1 \amalg M_2$ la menor relación de equivalencia tal que $p \sim f(p)$ para todo $p \in U_1$ y definimos $M := (M_1 \sqcup M_2)/\sim$ con la topología cociente.

a) Probar que M admite una única estructura de variedad diferenciable tal que los abiertos $(M_1 \sqcup \emptyset)/\sim$ y $(\emptyset \sqcup M_2)/\sim$ son difeomorfos a M_1 y M_2 respectivamente.

b) Mostrar con un ejemplo que si no se cumplen las hipótesis sobre el difeomorfismo f, entonces M puede no ser Hausdorff.

13. Sea $\pi : M \to N$ un revestimiento. Si N es una variedad diferenciable y las fibras de π son numerables, probar que M admite una estructura de variedad diferenciable tal que tanto π como las transformaciones deck son diferenciables.

14. Sea G un grupo discreto, sea M una variedad diferenciable y supongamos que G actúa sobre M por difeomorfismos. Decimos que la acción de G es *propiamente discontinua* si

todo punto $p \in M$ *posee un entorno abierto* U *de* M *tal que* $U \cap g(U) = \emptyset$ *siempre que* $g \in G \setminus \{1\}$.

a) Si la acción de G es propiamente discontinua, entonces es libre. Recíprocamente, si el grupo G es finito y la acción libre, entonces ésta es propiamente discontinua.

b) Si la acción de G sobre M es propiamente discontinua y el conjunto cociente M/G es Hausdorff, entonces existe una única estructura de variedad diferenciable sobre M/G tal que la proyección canónica $\pi : M \to M/G$ es diferenciable y se tiene que

si N *es una variedad diferenciable, entonces una función* $f : M/G \to N$ *es diferenciable si y solamente si la composición* $f \circ \pi : M \to N$ *es diferenciable.*

15. *a*) Sea G un grupo cíclico infinito y sea γ un generador de G. Hay una acción propiamente discontinua de G sobre $\mathbb{R}$ por difeomorfismos tal que cada vez que $p \in \mathbb{R}$ es

$$\gamma \cdot p = p + 1.$$

El cociente $\mathbb{R}/G$ es difeomorfo a S^1.

b) Sea G un grupo cíclico de orden 2 y sea γ un generador de G. Hay una acción propiamente discontinua de G sobre S^n por difeomorfismos tal que para todo $p \in S^n$ es

$$\gamma \cdot p = -p.$$

El cociente S^n/G es difeomorfo al espacio proyectivo $P^n(\mathbb{R})$.

c) Sea G un grupo cíclico infinito y sea γ un generador de G. Si $M = \mathbb{R} \times (-1, 1)$, entonces hay una acción propiamente discontinua de G sobre M por difeomorfismos tal que para cada $(x, y) \in M$ es

$$\gamma \cdot (x, y) = (x + 1, -y).$$

El cociente M/G es difeomorfo a la banda de Möbius. Si H es el subgrupo de G generado por γ^2, entonces el cociente M/H es difeomorfo a un cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$. El morfismo natural $M/H \to M/G$ es un revestimiento de la banda de Möbius por el cilindro.

16. Sea H el conjunto de matrices de $GL_3(\mathbb{R})$ de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{*}$$

con $x, y, z \in \mathbb{R}$.

a) Muestre que H es un subgrupo de $GL_3(\mathbb{R})$ y que tiene una estructura de variedad que hace de él un grupo de Lie de dimensión 3 difeomorfo a $\mathbb{R}^3$.

b) El subconjunto Γ de H de las matrices de la forma (*) con $x, y, z \in \mathbb{Z}$ es un subgrupo discreto. La función

$$(g, h) \in \Gamma \times H \mapsto gh \in H$$

es una acción propiamente discontinua de Γ sobre H por difeomorfismos. Muestre que la variedad cociente H/Γ es compacta. Descríbala geométricamente.

17. Al toro T^2 le podemos dar estructura de variedad diferenciable de las siguientes tres formas:

a) Identificando a T con $S^1 \times S^1$;

b) Identificando a T con $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, para la acción $(n, m) \cdot (x, y) = (x + n, y + m)$;

c) Identificando a T con la preimagen del valor regular 1 de $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2$.

Probar que todas estas estructuras son difeomorfas.

18. Sean $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$. La variedad Grassmanniana $Gr(k, n)$ es el espacio que parametriza el conjunto de subespacios vectoriales de dimensión k de $\mathbb{R}^n$. El objetivo de este problema es darle a $Gr(k, n)$ estructura de variedad diferenciable.

a) Sea $F(k, n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times k} : \mathrm{rg}(A) = k\}$. Probar que este conjunto es abierto en $\mathbb{R}^{n\times k}$ y por lo tanto tiene estructura de variedad diferencial.

b) Sea $\pi : F(k, n) \to Gr(k, n)$ la función que asigna a una matriz A su imagen (o espacio columna), y le damos a $Gr(k, n)$ la topología final con respecto a π. Probar que $\pi(A) = \pi(B)$ si y solo si existe $g \in GL(k, \mathbb{R})$ tal que $Ag = B$. Usar esto para probar que π es abierta.

Sugerencia: $GL(k, \mathbb{R})$ actúa a derecha sobre $F(k, n)$ con la multiplicación de matrices.

c) Probar que $Gr(k, n)$ es un espacio T2 y N2.

d) Sea $I := \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Sea A_I la matriz cuyas filas son las k filas de A indexadas por I. Definimos $V_I := \{A \in F(k, n) : \det A_I \neq 0\}$. Probar que los $\binom{n}{k}$ conjuntos V_I forman un cubrimiento de $F(k, n)$ por abiertos saturados.

e) Sea $I^c := \{1, 2, \ldots, n\} \setminus I$. Definimos las funciones $\overline{\varphi_I} : V_I \to \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$ de la siguiente manera: Dada una matriz $A \in V_I$, la matriz $\overline{\varphi_I}(A)$ está formada por las filas de $A(A_I)^{-1}$ indexadas por I^c. Probar que $\overline{\varphi_I}(Ag) = \overline{\varphi_I}(A)$ para todo $g \in GL(k, \mathbb{R})$ y por lo tanto $\overline{\varphi_I}$ induce una función $\varphi_I : U_I \to \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$, donde $U_I = \pi(V_I)$.

f) Probar que φ_I es un homeomorfismo. Calcular la inversa de φ_I y que $\varphi_I \circ \varphi_J^{-1}$ es suave para todo $I, J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ creciente. Concluir que $Gr(k, n)$ es una variedad diferenciable.

g) Sea $\rho : V_I \to U_I \times GL(k, \mathbb{R})$ dada por $\rho(A) = (\pi(A), A_I)$. Probar que esta función es un difeomorfismo compatible con la multiplicación a derecha por $GL(k, \mathbb{R})$ y que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V_I \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_I \times GL(k, \mathbb{R}) \arrow[dl, "p_1"] \\ & U_I & \end{tikzcd}$$

Concluir que una función $f : Gr(k, n) \to \mathbb{R}$ es suave si y solo si $\pi \circ f : F(k, n) \to \mathbb{R}$ es suave.

19. Una variedad diferenciable es localmente conexa y localmente compacta.

20. *a)* Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ una curva suave. Probar que existe una parametrización $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ de C con
$$\lim_{t\to 0} c^{(k)}(t) = \lim_{t\to 1} c^{(k)}(t) = 0$$
para todo entero $k \geqslant 1$.

b) Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ una curva suave a trozos. Probar que existe un camino $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ suave, es decir, continuo en $[0, 1]$ y diferenciable en $(0, 1)$, cuya imagen es C.

c) Sea M una variedad diferencial conexa. Probar que para cada par de puntos $p, q \in M$ existe un camino **suave** $c : [0, 1] \to M$ que los une, es decir, tal que $c(0) = p$ y $c(1) = q$.

21. Sean M una variedad, $U \subset M$ un abierto, y $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Probar que para todo compacto $K \subset U$, existe una función diferenciable $F : M \to \mathbb{R}$ tal que $F\big|_K = f\big|_K$.

22. Sean M y N dos variedades. Una función $f : M \to N$ es diferenciable si y solamente si para cada función diferenciable $g : N \to \mathbb{R}$ la composición $g \circ f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

23. Probar que $C^\infty(M) := \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable}\}$ es un anillo con la suma y el producto punto a punto. Probar que, si $g : M \to N$ es diferenciable, entonces $g^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$, dada por $g^*(f) = f \circ g$, es un morfismo de anillos.

24. Dadas M y N variedades compactas, probar que

a) Los ideales maximales de $C^\infty(M)$ son de la forma
$$\mathfrak{m}_p = \{f : f \in C^\infty(M) : f(p) = 0\}.$$

b) Todo morfismo de $\mathbb{R}-$álgebras de $C^\infty(N)$ en $C^\infty(M)$ viene de una función diferenciable entre M y N.

Observación: Por a) podemos recuperar la variedad M como conjunto a partir de $C^\infty(M)$, por b) tambien recuperamos su estructura diferenciable. ¿Qué pasa si M y N no son compactas? ¿Vale b) si solo pedimos morfismo de anillos?

25. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$ un punto.

a) El conjunto de gérmenes de funciones diferenciables alrededor de p se define como
$$C^\infty(M)_p = \{(U, f) : p \in U \subset M \text{ abierto y } f : U \to M \text{ diferenciable}\}/\sim$$
donde $(U, f) \sim (V, g)$ si existe $p \in W \subset U \cap V$ abierto tal que $f\big|_W = g\big|_W$. Probar que $C^\infty(M)_p$ es una $\mathbb{R}$-álgebra.

b) Si $g : M \to N$, es diferenciable, entonces $g^* : C^\infty(N)_{g(p)} \to C^\infty(M)_p$, $g^*(f) = f \circ g$, es un morfismo de anillos.

c) Probar que la aplicación $f \mapsto \overline{(M, f)}$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}-$algebras

$$C^\infty(M)/\mathfrak{m}_p^0 \to C^\infty(M)_p$$

donde $\mathfrak{m}_p^0 = \{f : f \in C^\infty(M) : f \text{ se anula en un entorno de } p\}$.

d) Probar que $C^\infty(M)_p$ es la localización de $C^\infty(M)$ en el ideal maximal $\mathfrak{m}_p$.