Notas para Cálculo Avanzado

Juan Pablo Pinasco

8 de enero de 2014

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este borrador está escrito principalmente para mí: ordenar qué contenidos voy a dar, en qué orden, con qué profundidad. Es difícil encontrar un único libro que contenga las cosas que se ven usualmente en Cálculo Avanzado, excepto el de Kolmogorov y Fomin [8], así que en la bibliografía señalaré para qué parte de la materia me parece útil cada uno.

1.1. Un problema

En cualquier materia de álgebra lineal, por básica que sea, vemos que el sistema de ecuaciones $A \cdot x = b$ con x, $b \in \mathbb{R}^N$, y $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ puede resolverse de manera única cuando A es inversible.

Por ejemplo, si sabemos que A es diagonalizable (por ejemplo, si es simétrica), existen una base de autovectores $\{u_i\}_{1\leq i\leq N}$, con autovalores asociados λ_i, podemos escribir b en esta base con ciertos coeficientes c_i, y sabemos entonces quién es la solución, pues

$$A \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{\lambda_i} \cdot u_i \right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{\lambda_i} A \cdot u_i = \sum_{i=1}^{N} c_i u_i = b.$$

¿Qué pasa cuando el problema está planteado en un espacio vectorial que no es de dimensión finita? Hay ejemplos concretos de estos problemas, de gran interés, que aparecen naturalmente en problemas de origen físico o matemático.

A mediados del s. XVIII, Euler se preguntó cuáles eran todas las funciones f periódicas de período 2π, y se encontró con las series de Fourier. Claro que los matemáticos de la época no estaban muy de acuerdo en que una superposición infinita de funciones, cada una multiplicada por un coeficiente arbitrario, fuese una función.

Pero en la misma época, Taylor resolvió el problema de la cuerda vibrante, hallar la posición $v(x,t)$ en que se encuentra la cuerda para cada tiempo $t > 0$ y en cada punto $x \in [0,\pi]$. Obtuvo el resultado como el límite de un problema discreto, un collar con N masas equiespaciadas, conectadas por un hilo de masa despreciable[1]: aparecieron discretizaciones de senos y cosenos, y en el límite, el desplazamiento se obtenían las series de Fourier, pero tampoco fueron aceptadas.

Muchos otros matemáticos se encontraron con estas series, pero no lograron imponerlas, hasta que 50 años después Fourier las redescubrió para resolver la ecuación del calor: quería hallar una función $u(x,t)$ solución de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

que cumpliese con la condición inicial $u(x,0) = f(x)$, y algunas condiciones de borde (por ejemplo, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para todo $t > 0$).

Uno puede preguntarse qué llevó a los matemáticos a aceptar el trabajo de Fourier (lleno de huecos, pasos dudosos, etc.), y probablemente fuese la serie que obtenía como solución, comparemos con los otros[2]:

$$\begin{aligned}
Euler: &\qquad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx) + b_n cos(nx);\\
Taylor: &\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nt) sen(nx);\\
Fourier: &\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} sen(nx)
\end{aligned}$$

Informalmente, si uno acepta que los coeficientes a_n sean acotados, puede dudar seriamente de la convergencia de las dos primeras series[3] mientras que en la tercera, cuando t crece, hay un factor exponencial que parece garantizar la convergencia. Para las dos primeras habría que pedir además que los coeficientes tiendan a cero (y con cierta velocidad).

En el s. XIX comenzaron a formalizarse algunas cuestiones para justificar desarrollos como los anteriores. Se descubrió que hacían falta diferentes espacios de funciones (algunos los veremos en la materia, otros quedan para Real, Funcional o Ecuaciones), espacios de sucesiones (por ejemplo, las tiras infinitas de coeficientes $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, y lo principal de todo, reproducir el análisis y el álgebra básicos: definir límite, continuidad de funciones definidos en estos espacios, su derivabilidad... Parece sencillo, pero resulta que incluso las transformaciones lineales pueden ser muy malas (incluso discontinuas!), cosa que no ocurre en dimensión finita.

[1]lla cuenta está hecha en varios lados, aquí debería poner alguna referencia

[2]Seguro que falta algún 2π

[3]Y tendría razón!

Por otra parte, trataremos de entender ciertas propiedades generales que pueden tener estos y otros espacios: existencia de conjuntos densos “manejables”, completitud, conexión, compacidad, etc. Estos conceptos de tipo topológico se continuarán luego en Topología.

Volviendo a las series de Fourier, un problema importante, aún no resuelto del todo, es el siguiente:

Supongamos que tenemos una serie trigonometrica

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx) + b_n cos(nx);$$

¿qué condiciones debemos imponer en un conjunto C tal que si $S(x) = 0$ para todo $x \in C$, entonces los coeficientes a_n, b_n son todos nulos?

Cantor fue el primero en estudiar una variante de este problema, la unicidad del desarrollo de Fourier de una función: ¿será posible que una misma función f tenga dos desarrollos distintos?, es decir, si

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx) + b_n cos(nx) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n sen(nx) + \beta_n cos(nx).$$

¿podemos asegurar que $a_n = \alpha_n$ y $b_n = \beta_n$ para todo n?

Al intentar resolver este problema, necesitó mucha matemática nueva, y conceptos novedosos como el de numerabilidad, o conjuntos perfectos, que veremos en esta materia. Para los interesados, las primeras 25 páginas del artículo de A. Kechris [6] es la mejor presentación de las herramientas que veremos aquí y en Funcional que se utilizan en este problema.

1.2. Contenidos

Los contenidos de estas notas se dividen en dos grandes grupos, por la única razón de que uno entra para el 1er parcial, y el otro para el 2do. La materia avanza gradualmente, pero los conocimientos se acumulan rápido, y en cada tema nuevo se utlizan los anteriores.

- Primera Parte:
  - Cardinalidad.
  - Espacios métricos y distancias
  - Continuidad y continuidad uniforme.

- Separabilidad, completitud y compacidad.

- Segunda Parte:
    - Conexión.
    - Espacios normados
    - Convergencia de sucesiones y series de funciones.
    - Diferenciación en $\mathbb{R}^n$ (y, para valientes, en espacios de Banach).

Puede haber cierta oscilación cerca de la fecha del primer parcial, y de acuerdo a quién sea el docente de la materia, con temas que cambien de un grupo al otro. Esencialmente, son esos.

1.3. Advertencia:

Cuidado: las funciones pasaron a ser variables.

Hasta ahora, en las materias anteriores (con la excepción del Taller de Cálculo Avanzado), se enseñaron *técnicas* para resolver ciertos problemas y había ejemplos modelo de lo que se tomaría en el parcial (aunque eran difíciles de descubrir a priori): un teorema de la clase teórica era seguido por su aplicación en distintos ejemplos en la clase práctica, y luego por unos 20 ejercicios para hacer en la guía. Piensen, por ejemplo, en la resolución de sistemas lineales, inversión de matrices, determinantes, cálculo de límites, diferenciación, polinomio de Taylor, multiplicadores de Lagrange para extremos...

En Cálculo Avanzado se produce un quiebre, y el resto de las materias de la licenciatura será similar: el objetivo es estudiar ciertos *conceptos*, y las prácticas contienen ejercicios que profundizan detalles o consecuencias escondidas de las definiciones. En los parciales se pedirán demostraciones que son prácticamente imposibles de escribir si uno no entiende el o los conceptos involucrados en el problema. En este sentido, la práctica no está para internalizar una técnica, sino un concepto, y al no haber un procedimiento típico para resolver los ejercicios, es posible que uno se sienta desorientado al ver un problema por primera vez. E incluso por segunda vez.

1.4. Otra advertencia:

Un buen maestro protege a sus alumnos de su propia influencia.
Bruce Lee

Tengo cierta predilección por demostraciones sencillas, directas, cortas -y últimamente las empecé a coleccionar. Esto no quita que ciertas demostraciones clásicas -aburridas, retorcidas- tengan otras ventajas. No estaría nada mal que cada uno busque demostraciones alternativas a las que aquí se presentan.

Por ejemplo, no están incluídas aquí las demostraciones de Stone-Weierstrass utilizando polinomios de Bernstein, ni la que utilia convolución. Tampoco la de Arzela-Ascoli, vía límite sobre un denso y extrayendo luego una sucesión diagonal.

Capítulo 2

Completitud y axioma de elección

2.1. Completitud

Paradójicamente, este capítulo está incompleto.

No se preocupe mucho, la matemática creció durante siglos sin la necesidad de formalizar este concepto.

Básicamente, el resultado central de esta sección sería probar que los números reales con el orden usual son el único cuerpo ordenado completo. Hay distintas formas de introducir los números reales, siendo las principales:

- Griegos: asociar números a puntos de la recta.
- Método axiomático: axiomas de cuerpo, más axiomas de orden (ver [12]).
- Método genético: construír los números a partir de los números naturales (u otro conjunto intuitivamente comprensible).

Según Bertrand Russell, la ventaja del método genético sobre el axiomático era la misma del trabajo honrado respecto al robo.
Las construcciones más conocidas de los números reales a partir de los naturales (y su extensiones, los enteros y los racionales) son las siguientes:

- Cortaduras de Dedekind.
- Clases de equivalencias de sucesiones convergentes formadas por números racionales.
- Desarrollos decimales.

Las construcciones anteriores (una cortadura, una clase de equivalencia, un desarrollo infinito) corresponden a un número real, y se obtiene que no hay más números que estos. Además, son equivalentes a las siguientes proposiciones que garantizan la completitud:

- Griegos: la recta no tiene huecos, más arquimedianidad.
- Encaje de intervalos: toda sucesión de intervalos cerrados encajados tiene intersección no vacía.
- Toda sucesión monótona y acotada es convergente.
- Toda sucesión acotada tiene subsucesiones convergentes.
- Axioma del supremo: todo conjunto acotado superiormente tiene un supremo, la menor de las cotas superiores.

Se puede encontrar una discusión respecto a las equivalencias de estas proposiciones en [3].

Una construcción mucho más moderna, basada en juegos se debe a Conway, sólo que el conjunto que se obtiene es un poco más grande: los números *surreales*.

2.2. Axioma de elección

Esencialmente, el Axioma de Elección nos dice que para toda familia de conjuntos no vacíos existe un conjunto formado por un elemento de cada uno de ellos. Es decir,

Axioma de elección: Para toda familia de conjuntos

$$\mathscr{A} = \{A_i \,:\, i \in I\}$$

con $A_i \neq \emptyset$, existe un conjunto C tal que para todo $i \in I$, $C \cap A_i = \{a_i\}$.

Una formulación alternativa, que podríamos demostrar fácilmente a partir de lo anterior, es la siguiente, formulada en términos de $\mathscr{P}(X)$ (la colección de subconjuntos de X, también denotada 2^X):

Teorema 2.2.1. *Para todo conjunto X, existe una función*

$$e : \mathscr{P}(X) \setminus \emptyset \to X,$$

tal que $e(A) = a \in A$.

Capítulo 3

Cardinalidad

Para releer cuando termine este capítulo. A esta altura pensará que tal vez haya algún error; más adelante estará convencido. Pero resulta que no hay errores:

> **Problema:**
> A cada número real $x \in [0,1]$ le asignamos un subconjunto contable $S(x) \subset [0,1]$. ¿Podremos elegir los conjuntos S de forma tal que para todo par $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$, con $x \neq y$, se cumple que $y \in S(x)$ ó $x \in S(y)$ (pero no ambos)?

3.1. Definiciones básicas

La idea básica de cardinalidad es definir una relación de equivalencia entre conjuntos, y a cada clase de equivalencias le corresponderá un cardinal:

Definición 3.1.1. Sean X e Y dos conjuntos. Decimos que son coordinables (o equipotentes, o que tienen el mismo cardinal) si existe $f : X \to Y$ biyectiva. [Notación: $X \sim Y$.]

Proposición 3.1.2. *La relación $\sim$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. i.- Tenemos $X \sim X$, con $id : X \to X$.

ii.- Si $X \sim Y$, existe $f : X \to Y$ biyectiva, definimos $f^{-1} : Y \to X$, biyectiva, con lo cual $Y \sim X$.

iii.- Si $X \sim Y$, $Y \sim Z$, existen $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ biyectivas, con lo cual podemos definir $g \circ f : X \to Z$ biyectiva. $\square$

Definición 3.1.3. Definimos el cardinal de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = Card(X) = \{Y \ : \ X \sim Y\}.$$

Observemos que estas definiciones no dicen que dos conjuntos de igual cardinal tengan el mismo *número*, la misma *cantidad* de elementos, sólo dice que hay una biyección entre ambos.

Definición 3.1.4. Llamaremos $\mathbb{I}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$, el intervalo inicial del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.

Teorema 3.1.5. *Sean n, $m \in \mathbb{N}$. Entonces, $\mathbb{I}_n \sim \ I_m$ si y sólo si $n = m$.*

Demostración. Supongamos $n < m$. Observemos que si $\mathbb{I}_n \sim \mathbb{I}_m$, hay una biyección entre ellos, y podemos definir $f : \mathbb{I}_m \to I_{n+1}$ sobreyectiva, $f(k) = k$ para $1 \leq k \leq n+1$, $f(k) = 1$ si existe $k > n+1$, la composición resulta sobreyectiva de I_n en I_{n+1}.

Será suficiente probar que no existe $f : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_{n+1}$ sobreyectiva. Lo hacemos por inducción:

- $n = 1$: Podemos definir $f(1) = 1$ ó $f(1) = 2$, pero en cualquier caso, no será sobreyectiva.
- Paso inductivo: supongamos que vale si $1 \leq k \leq n-1$. Si existe $f : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_{n+1}$ sobreyectiva, existe k tal que $f(n) = k$. Definamos una permutación σ de $\mathbb{I}_{n+1}$ tal que $\sigma(k) = n+1$.

  Ahora, $\sigma \circ f : \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_{n+1}$ es sobreyectiva, y $\sigma \circ f(n) = \sigma(k) = n+1$, con lo cual la restricción $\sigma \circ f|_{\mathbb{I}_{n-1}} : \mathbb{I}_{n-1} \to \mathbb{I}_n$ es sobreyectiva, absurdo!

El teorema queda demostrado. □

Terminemos esta sección con una serie de definiciones:

Definición 3.1.6. Diremos que X es finito si existe n tal que $X \sim \mathbb{I}_n$, y escribimos $n = \#X$.

Definición 3.1.7. Diremos que X es infinito si no existe n tal que $X \sim \mathbb{I}_n$.

Definición 3.1.8. Diremos que X es numerable si $X \sim \mathbb{N}$.

Definición 3.1.9. Diremos que X es contable si X es finito o numerable.

3.2. Teoremas principales

Sabemos que hay infinitos cardinales, gracias a los conjuntos $\mathbb{I}_n$: 1, 2,... , n,... y deberá haber algún cardinal más para los que tienen infinitos elementos. ¿Habrá muchos más? Cantor contestó esta pregunta a mediados de la década de 1870:

Teorema 3.2.1 (Cantor)**.** *Sean X un conjunto, y $\mathscr{P}(X) = \{A : A \subset X\}$. Entonces, $\#X \neq \#\mathscr{P}(X)$.*

"Jamás sería miembro de un club que me acepte como miembro."
Groucho Marx.

Demostración. Supongamos que existe $f : X \to \mathscr{P}(X)$ biyectiva. En particular, f es sobreyectiva.

Dado $x \in X$, puede ser que $x \in f(x)$ ó que $x \notin f(x)$. Definamos B como el conjunto de elementos de X que no pertenecen al conjunto que f les asigna:

$$B = \{x \in X : x \notin f(x)\}.$$

Como f es sobreyectiva, existe $y \in X$ tal que $f(y) = B$, pero entonces

- Si $y \notin B$, entonces $y \notin f(y)$, y por lo tanto $y \in B$.
- Si $y \in B$, entonces $y \in f(y)$, y por lo tanto $y \notin B$.

El absurdo vino de creer que existía f. □

¿Tendrán cierta estructura los cardinales, se podrán comparar al menos? Probemos introducir un orden:

Definición 3.2.2. Decimos que $\#X \leq \#Y$ si existe $f : X \to Y$ inyectiva. Decimos que $\#X < \#Y$ si $\#X \leq \#Y$ y no se tiene $X \sim Y$.

Si este es un orden de los cardinales, tenemos $\#X < \mathscr{P}(X)$, pues hay una inyección $x \to \{x\}$, pero no una biyección, por el teorema anterior. Este resultado nos dice que hay muchos más cardinales de los que nos imaginamos (las partes del conjunto de los cardinales que nos imaginamos tiene un cardinal mayor!)

Tenemos un candidato a orden entre los cardinales, pero no es obvio que realmente lo sea. Es claro que $X \leq X$, la identidad es inyectiva. Y también es transitiva, pues componer dos funciones inyectivas da una función inyectiva. El problema está en la antisimetría: ¿es cierto que si $X \leq Y$, $Y \leq X$ entonces $X \sim Y$? El resultado es afirmativo:

Teorema 3.2.3 (Schröder-Bernstein)**.** *Si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ inyectivas, entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.*

Demostración de Banach, Partición de dominios. Demostraremos que existen dos particiones disjuntas de X e Y,

$$X = X_1 \cup X_2, \qquad Y = Y_1 \cup Y_2$$

tales que

$$f : X_1 \to Y_1, \qquad g : Y_2 \to X_2$$

sean biyectivas.

Si tales particiones existen, tenemos

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X_1 \\ g^{-1}(x) & x \in X_2 \end{cases}$$

y claramente h es biyectiva.

Definamos $\Phi : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$,

$$\Phi(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A)).$$

Esta función es creciente, si $A \subset B$, entonces $\Phi(A) \subset \Phi(B)$, pues

$$\begin{gathered} f(A) \subset f(B) \\ Y \setminus f(A) \supset Y \setminus f(B) \\ g(Y \setminus f(A)) \supset g(Y \setminus f(B)) \\ X \setminus g(Y \setminus f(A)) \subset X \subset g(Y \setminus f(B)) \end{gathered}$$

Sea $\mathscr{C} = \{C \subset X \ : \ \Phi(C) \subset C\}$. Como $X \in \mathscr{C}$, no es vacío, y tiene sentido definirse

$$A = \bigcap_{C \in \mathscr{C}} C.$$

Como $A \subset C$ para todo C en $\mathscr{C}$, Φ es creciente, y $\Phi(C) \subset C$, tenemos $\Phi(A) \subset \Phi(C) \subset C$ para todo C en $\mathscr{C}$. Por lo tanto, $\Phi(A) \subset A$.

Además, usando otra vez que es creciente, como $\Phi(A) \subset A$, tenemos

$$\Phi(\Phi(A)) \subset \Phi(A),$$

con lo cual $\Phi(A)$ está en $\mathscr{C}$, y $A \subset \Phi(A)$.

Tenemos entonces $A = \Phi(A)$, sea $X_1 = A$, $Y_1 = f(A)$, $Y_2 = Y \setminus f(A)$, y resulta que $g(Y_2) = X_2$ es exactamente $X \setminus X_1$, pues

$$A = X \setminus g(Y \setminus f(A)) \iff g(Y \setminus f(A)) = X \setminus A.$$

Claramente, $f : X_1 \to Y_1$ y $g : Y_2 \to X_2$ son biyectivas (eran inyectivas, en estos conjuntos son sobreyectivas por construcción).

El teorema queda demostrado. $\square$

Observación 3.2.4. En el libro de Kolmogorov y Fomin [8] hay una demostración distinta. La traducción al castellano tiene un error de notación que la dificulta notablemente.

A continuación, como ejemplo del teorema anterior, calcularemos el cardinal de algunos conjuntos de números.

Ejemplo 3.2.5. Los conjuntos de números naturales, enteros, y racionales tienen el mismo cardinal.

Por transitividad de $\sim$, alcanza con ver que $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, y $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$.

- $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$: definimos $i_{\mathbb{N}\mathbb{Z}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, la inclusión, $i_{\mathbb{N}\mathbb{Z}}(n) = n$, que es inyectiva (pues $f(n) = f(m) \iff n = m$).

  Ahora, definimos $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ como $f(a) = 2a$ si $a > 0$, y $f(a) = 2|a| + 1$ si $a < 0$, que también es inyectiva, pues manda los positivos en los pares (y $2a = 2b$ si y sólo si $a = b$), y los no positivos en los impares (también $2|a| + 1 = 2|b| + 1$ si y sólo si $a = b$).

- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$: definimos $i_{\mathbb{Z}\mathbb{Q}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, la inclusión, que es inyectiva.

  Definamos $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ como $f(a/b) = sgn(a)2^{|a|} \cdot 3^b$. Por el Teorema Fundamental de la Aritmética, es inyectiva.

Teorema 3.2.6 (Cantor)**.** *El cardinal de los reales es distinto del cardinal de los naturales.*

Primera demostración: Supongamos que existe una biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, y tenemos $f(n) = x_n$. Al real x_n le asignamos un intervalo centrado en este punto de longitud 2^{-n}.

La unión de todos los intervalos, no necesariamente disjunta, tiene una longitud menor o igual a la suma de las longitudes de los intervalos, pues tal vez se superpongan:

$$|\cup_n I_{q_n}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_{q_n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Claramente, quedaron números reales afuera. $\square$

Capítulo 4

Cardinalidad

4.1. Conjuntos contables

Los conjuntos contables resultan más sencillos de manipular, y podemos demostrar una serie de resultados para ellos.

A lo largo de esta sección, si consideramos una familia de conjuntos $\{X_i\}_{i\in I}$, los suponemos disjuntos.

Teorema 4.1.1. *Si X es numerable, entonces $X = \{x_n\}_{n\geq 1}$.*

Demostración. Como $X \sim \mathbb{N}$, existe $f : \mathbb{N} \to X$ biyectiva. Definimos $x_n = f(n)$, con lo cual $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$. Por otro lado, si $x \in X$, como f es sobreyectiva, existe m tal que $f(m) = a$ y por lo tanto $a = x_m$; tenemos $X \subset \{x_n\}_{n\geq 1}$. □

Ejemplo 4.1.2. Consideremos el conjunto A de sucesiones formadas sólo por ceros y unos,

$$A = \{\{a_n\}_{n\geq 1} \,:\, a_n \in \{0,1\}\} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

Entonces, A no es numerable.

Supongamos que sí es numerable, y por el teorema anterior, escribimos

$$A = \{\{a_n^1\}_{n\geq 1}, \cdots, \{a_n^j\}_{n\geq 1}, \cdots\}.$$

Como todas las sucesiones de ceros y unos estarían contenidas en A, la sucesión donde $a_n = 1 - a_n^n$ (en el enésimo lugar tiene lo contrario a lo que tiene la enésima sucesión en el enésimo lugar) debe ser alguna de ellas, digamos la $\{a_n^j\}_{n\geq 1}$ con lo cual $a_j = a_j^j$ y $a_j = 1 - a_j^j$, absurdo!

Por lo tanto, el conjunto A no es numerable.

□

Teorema 4.1.3 (Cantor). *El cardinal de los reales es distinto del cardinal de los naturales.*

Segunda demostración: Supongamos que existe una biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, y tenemos $f(n) = x_n$.

Definimos una sucesión de intervalos I_n de la siguiente manera: comenzando con el intervalo $[0,1]$, lo dividimos en tres intervalos cerrados iguales, y al menos uno de ellos no contiene a x_1, ese será nuestro I_1.

Si tenemos definido el intervalo I_n, lo dividimos en tres intervalos cerrados iguales, y al menos uno de ellos no contiene a x_{n+1}, ese será nuestro I_{n+1}.

Por el Teorema/Principio de Encaje de Intervalos, existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in \cap_{n\geq 1} I_n$. Este x no es ninguno de los x_n, ya que fueron excluídos todos tarde o temprano, y suponíamos que $\mathbb{R} = \{x_n\}_{n\geq 1}$.

Luego, no puede existir tal biyección. □

Teorema 4.1.4. *Sea X numerable, $Y \subset X$. Entonces, Y es contable.*

Demostración. Queremos ver que Y es contable, es decir, finito o numerable. Supongamos que no es finito.

Como $X \sim \mathbb{N}$, $X = \{x_n\}_{n\geq 1}$. Definimos

$$n_1 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \,:\, x_n \in Y\},$$

e inductivamente, elegidos $n_1, n_2, \cdots, n_{k-1}$, definimos

$$n_k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \,:\, n > n_{k-1},\, x_n \in Y\}.$$

Tenemos una subsucesión creciente de naturales, y definimos $g : \mathbb{N} \to Y$, $g(k) = x_{n_k}$.

- Verifiquemos que es inyectiva: si $k \neq j$, entonces $n_k \neq n_j$ por ser estrictamente creciente) con lo cual $x_{n_k} \neq x_{n_j}$.

- Verifiquemos que es sobreyectiva: un elemento cualquiera de Y corresponde a algún x_j de X, y por lo tanto, existe k tal que $n_k \leq j < n_{k+1}$. Pero como

  $$j < n_{k+1} = \text{mín}\{n > n_k : x_n \in B\},$$

  deberíamos haber elegido j en lugar de n_{k+1}, debe ser $j = n_k$.

□

Teorema 4.1.5. *Sea $f : X \to Y$ inyectiva, e Y numerable. Entonces, X es contable.*

Demostración. Como f es inyectiva, $X \sim f(X)$, y como $f(X) \subset Y$, $f(X)$ es contable por el teorema anterior. Luego, X es contable. □

Teorema 4.1.6. *Sea $f : Y \to X$ sobreyectiva, sea Y numerable. Entonces, X es contable.*

Demostración. Como Y es numerable, existe $h : \mathbb{N} \to Y$, y $f \circ h : \mathbb{N} \to X$ es sobreyectiva. Para cada $a \in A$, definimos

$$n_x = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \ : \ f(n) = x\}.$$

Sea $g : X \to \mathbb{N}$, $g(x) = n_x$.

Verifiquemos que es inyectiva: $g(x) = g(x')$ si y sólo si $n_x = n_{x'}$, es decir,

$$x = f(n_x) = f(n_{x'}) = x' \Leftrightarrow x = x'.$$

Ahora, por el teorema anterior, X es contable. □

Teorema 4.1.7. *Si X es contable, existe $f : \mathbb{N} \to X$ sobreyectiva.*

Demostración. Si X es numerable, existe $f : \mathbb{N} \to X$ biyectiva (y por lo tanto sobreyectiva).

Si X es finito, existe $g : \mathbb{I}_n \to X$ biyectiva, y definamos $h : \mathbb{N} \to \mathbb{I}_n$, $h(i) = i$ si $i < n$, $h(i) = n$ si $i \geq n$. Ahora, $f = g \circ h$ es sobreyectiva. □

Observación 4.1.8. El hotel de Hilbert: un hotel con numerables habitaciones tiene todas ocupadas. Cae un turista y pide una habitación. El conserje le da la llave de la primera, y le dice que vaya a la primera habitación, y que le diga al ocupante que se mude a la siguiente (y que el ocupante de esa se mude a la siguiente, etc.) Al final, todos tienen habitación, pero difícilmente vuelvan a pasar una noche en un hotel en esas condiciones.

Ejercicio 4.1.9. ¿Qué pasa si el hotel está todo ocupado y llega una delegación contable? (contable, de finito y numerable, no de contadores). ¿Consiguen acomodarlos a todos?

Teorema 4.1.10. *El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.*

Demostración. Por Schroder-Bernstein sale rápido. La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida como $f(i) = (i, 1)$ es inyectiva. La función $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $f(i, j) = 2^i 3^j$ es inyectiva.

Otra demostración: demuestre que

$$f(k, j) = \frac{(k + j - 2)(k + j - 1)}{2} + k$$

es inyectiva (acá no hace falta el teorema fundamental de la aritmética), y como hay una inyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, el conjunto es contable, pero como no es finito, es numerable. □

Teorema 4.1.11. *Para $n \in \mathbb{N}$, sea X_n un conjunto numerable. Entonces, $X = \cup_n X_n$ es numerable.*

Demostración. Por ser numerables, existen $f_n : \mathbb{N} \to X_n$ biyectivas,

$$X_n = \{f_n(1), f_n(2), \cdots\}.$$

Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \cup_n X_n$ definida como $f(n,m) = f_n(m)$.

Verifiquemos que es sobreyectiva: si $x \in X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X_n$, y como f_n es una biyección, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x = f_n(m)$. Luego, $x = f(n,m)$.

Entonces, X es contable, y como no es finito (cada X_n no lo es) es numerable. $\square$

Ejercicio 4.1.12. Sea L contable, y para cada $\lambda \in L$, sea X_λ contable. Demostrar que

$$X = \cup_{\lambda \in L} X_\lambda$$

es contable.

En particular: si cada X_k es numerable, entonces $\cup_{1 \le k \le M} X_k$ es numerable.

Si cada X_k es finito, $\cup_{k \ge 1} X_k$ es numerable.

Ejemplo 4.1.13. Sea $\mathbb{Q}(x)$ el conjunto de polinomios con coeficientes racionales. Afirmamos que $\mathbb{Q}(x) \sim \mathbb{N}$.

Sea $\mathbb{Q}_n(x) = \{p(x) \in \mathbb{Q}(x) \ : \ gr(p(x)) \le n\}$. Tenemos

$$f_n : \mathbb{Q}^{n+1} \to \mathbb{Q}_n(x), \quad f(a_0, \cdots, a_n) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Como cada f_n es biyectiva, $\mathbb{Q}^{n+1}$ es numerable, y la unión numerable de numerables es numerable, $\mathbb{Q}(x)$ es numerable.

Ejemplo 4.1.14. Sea $A = \{r \in \mathbb{R} \ : \ p(r) = 0, \ p \in \mathbb{Q}(x)\}$. Entonces, A es numerable.

Por el ejemplo anterior, $\mathbb{Q}(x)$ es numerable, y como cada polinomio tiene finitas raíces, tenemos una unión numerable de conjuntos finitos: A es contable. Claramente, A no es finito porque todo $q \in \mathbb{Q}$ está en A, es raíz del polinomio $x - q$.

Este ejemplo muestra que los números algebraicos son numerables.

Ejercicio 4.1.15. Consideremos el conjunto A_0 de sucesiones formadas sólo por ceros y unos, pero que a partir de algún lugar, sólo tienen ceros:

$$A_0 = \{\{a_n\}_{n \ge 1} \ : \ a_n \in \{0,1\}, \ \text{y existe } n_0 \text{ tal que } a_n = 0 \text{ si } n \ge n_0\}.$$

Entonces, A_0 es numerable. ¿Qué ocurre con las sucesiones A_1, formadas sólo por ceros y unos, pero que a partir de algún lugar, sólo tienen unos?

Sugerencia: considere A_0^j, las sucesiones de ceros y unos tales que $a_n = 0$ si $n > j$. Cada A_0^j es un conjunto finito, con 2^j elementos, y su unión (no necesariamente disjunta) es numerable.

4.2. Conjuntos arbitrarios

En esta sección analizaremos propiedades de conjuntos infinitos arbitrarios.

Teorema 4.2.1. *Sea X infinito. Entonces existe $Y \subset X$ numerable.*

Demostración. Esta demostración depende del Axioma de Elección: tenemos

$$f : \mathscr{P}(X) \setminus \emptyset \to X.$$

Elegimos un elemento $x_1 = f(X)$, y definamos $X_1 = X \setminus \{x_1\}$. Podemos elegir ahora $x_2 = f(X_1)$.

En general, elegidos $x_1, \cdots, x_k$, elegimos

$$x_{k+1} = f(X_k) = f(X \setminus \{x_1, \cdots, x_k\}).$$

Tenemos $g : \mathbb{N} \to X$, $g(n) = x_n$, que es inyectiva, y entonces $g(\mathbb{N}) \subset X$ es numerable. □

Teorema 4.2.2. *Si X es infinito, existe $Y \subset X$, Y numerable, tal que $X \sim X \setminus Y$.*

Demostración. Por el teorema anterior, existe $Y_1 = \{y_1, y_2, \cdots\} \subset X$, con $Y_1 \sim \mathbb{N}$. Sean ahora

$$Y_p = \{y_2, y_4, \cdots\} = \{y_{2n}\}_{n \geq 1}, \quad Y_i = \{y_1, y_3, \cdots\} = \{y_{2n-1}\}_{n \geq 1},$$

Tenemos $B_1 \sim Y_p \sim Y_i \sim \mathbb{N}$, con lo cual existe $g : Y_1 \to Y_p$ biyectiva, y definimos $f : X \to X \setminus Y_i$ de la siguiente manera:

$$f(y) = \begin{cases} x & x \in X \setminus Y_1 \\ g(x) & x \in Y_1 \end{cases}$$

Esta función es biyectiva entre X y $X \setminus Y_i$. □

Teorema 4.2.3. *Si $X \sim Y$, $X' \sim Y'$, tal que $X \cap X' = \emptyset = Y \cap Y'$. Entonces,*

$$X \cup X' \sim Y \cup Y'.$$

Demostración. Como $X \sim Y$, existe $f_1 : X \to Y$ biyectiva.

Como $X' \sim Y'$, existe $f_2 : X' \to Y'$ biyectiva.

Definimos $f : X \cup X' \to Y \cup Y'$ como

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in X \\ f_2(x) & x \in X' \end{cases}$$

y es biyectiva. □

Teorema 4.2.4. *Sea X infinito y X' numerable. Entonces, $X \cup X' \sim X$.*

Demostración. Sale usando los dos teoremas anteriores: escribimos $X = Y \cup (X \setminus Y)$, con $Y \sim \mathbb{N}$, y sabemos que $X \sim X \setminus Y$. Ahora, como $X' \sim \mathbb{N} \sim Y$,

$$X \cup X' \sim (X \setminus Y) \cup X',$$

y el teorema queda demostrado. □

Ejemplo 4.2.5. Recordemos los conjuntos A de sucesiones de ceros y unos, y A_0 aquellas que terminan en una tira de ceros. Los teoremas anteriores implican que

$$A \sim A \setminus A_0.$$

Más aún, podemos restar las sucesiones que terminan en tiras de ceros y unos, con lo cual

$$A \sim A \setminus (A_0 \cup A_1).$$

El ejemplo anterior es importante por distintos motivos: no hay nada especial en considerar ceros y unos, podían ser dígitos del 0 al 9 y el resultado es el mismo. En base 10, los números terminados en una tira de ceros tienen una representación alternativa terminada en una tira de 9 (recordemos que $1 = 0{,}999\ldots$). En base 2, los números reales del intervalo $[0,1]$ son sucesiones de ceros y unos, y también hay números que tienen dos representaciones, una terminada en ceros, la otra en unos:

$$1 = 0,111\cdots, \qquad \text{pues} \qquad \sum_{n=1} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Tenemos entonces:

Teorema 4.2.6 (Cantor)**.** *El cardinal de los reales es distinto del cardinal de los naturales.*

Tercera demostración: Si no se convenció con las demostraciones anteriores, probemos con una más.

Como $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathscr{P}(\mathbb{N})$, su cardinal es estrictamente mayor al de $\mathbb{N}$.

Definamos

$$f : [0,1] \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \qquad f(x) = \{x_n\}_{n\geq 1}, \quad x = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{2^n},$$

las cifras del desarrollo en base 2. Esta f es inyectiva.

Ahora, si definimos

$$g : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1], \qquad g(\{x_n\}_{n\geq 1}) = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{2^n},$$

donde $x_n = 0$ ó 1 para cada n. Lamentablemente, esta función no es inyectiva, porque los números que terminan en una tira de unos tienen otro desarrollo que termina en una tira de cero.

Definamos $S = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \cup_{i\geq 1} S_i$, con

$$S_i = \{\{x_n\}_{n\geq 1} \ : \ x_n = 0,1,\ x_n = 0\ n \geq i\},$$

y vemos que S y $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tienen el mismo cardinal porque una unión contable de conjuntos contables es contable, y además, al quitar un conjunto contable de un conjunto infinito no numerable, queda de igual cardinal que antes (y en este caso quedó infinito). $\square$

Observación 4.2.7. Hoy día, que $0,999... = 1$ y los cardinales transfinitos introducidos por Cantor reemplazaron el papel que jugaban los tres problemas clásicos de la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. Cualquier foro de internet que se jacte de tener un público matemático debe contener al menos uno o más personajes que se dedican a demostrar que el cardinal de $\mathbb{N}$ es igual al de $\mathbb{R}$, o que $0,999... \neq 1$. En general, sólo conocen la demostración vía el argumento diagonal (que aquí no vamos a reproducir, similar a la anterior, y que pueden verla en [8]; tampoco voy a incluir la demostración usando teoría de juegos).

Paradójicamente, un "error" que encuentran algunos al argumento diagonal de Cantor es el paso en que uno quita los desarrollos repetidos... porque creen en simultáneo que $0,999... \neq 1$.

4.3. Operaciones con cardinales

Definición 4.3.1. Dados dos cardinales n, m (no necesariamente finitos) sean X e Y disjuntos tales que $n = \#X$, $m = \#Y$. Podemos definir las siguientes operaciones:

- Suma: $n + m = \#(X \cup Y)$.
- Producto: $n \cdot m = \#(X \times Y)$.
- Potencia: $n^m = \#\{f : Y \to X\} = \#(X^Y)$.

Observación 4.3.2. En nuestra definición hemos tomado X e Y con los cardinales correspondientes, y definimos las operaciones vía los conjuntos. Deberíamos probar que esta definición es independiente de los conjuntos elegidos X e Y.

Por ejemplo, si $n = \#X'$, $m = \#Y'$, debe ser $n + m = \#(X' \cup Y')$. Esto es cierto, pues existen biyecciones $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$, con lo cual definimos $h : X \cup Y \to X' \cup Y'$ como

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & z \in X. \\ g(z) & z \in Y. \end{cases}$$

Ya vimos que esta función es biyectiva, complete los otros dos casos.

Ejemplo 4.3.3. Si llamamos $\aleph_0 = \#\mathbb{N}$ y $c = \#\mathbb{R}$, tenemos

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \qquad c + c = c,$$

y podemos verificarlo observando que

$$\mathbb{N} = \{2n\}_{n\geq 1} \cup \{2n-1\}_{n\geq 1}, \qquad [0,1) = [0,1/2) \cup [0,1/2).$$

Que el cardinal de cualquier intervalo de la recta es c, podemos verificarlo observando que $\operatorname{arc\,tg}(x)$ establece una biyección con el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Ahora, podemos llevar este intervalo a cualquier otro intervalo (a,b):

$$y = \frac{b}{\pi} \cdot (x + \pi/2) + a.$$

Si están o no los bordes no es un problema: si a un conjunto infinito le unimos otro contable, su cardinal no cambia.

Encuentre ejemplos análogos para el producto. Por ejemplo, $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Observación 4.3.4. En el caso de potencias, podríamos demostrar las reglas

$$n^m \cdot n^p = n^{m+p}, \quad (n^m)^p = n^{m \cdot p}.$$

Tomando N, M, P con cardinales n, m, p respectivamente, tenemos

$$N^M \times N^P \sim N^{M \cup P}$$

pues si $f \in N^{M\cup P}$, $f : M \cup P \to N$, tenemos $(f|_M, f|_P) \in N^M \times N^P$. A la inversa, dadas $f \in N^M$, $g \in N^P$, definimos $h \in N^{M\cup P}$, con $h(x) = f(x)$ si $x \in M$, y $h(x) = g(x)$ si $x \in P$.

Para el segundo, observemos que si $f \in (N^M)^P$, para cada $z \in P$ tenemos una función $f_z : N \to M$. Si $y \in M$. Pero a $f_z(y)$ podemos pensarla como una función de dos variables $g(z,y)$.

Teorema 4.3.5. *Sea n el cardinal de los naturales o de los reales, m otro cardinal tal que $2 \leq m \leq 2^n$. Entonces $m^n = 2^n$.*

Demostración. Sabemos que $\#\mathbb{N} = \#(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, y $\#\mathbb{R} = \#(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Tenemos $2^n \leq m^n \leq (2^n)^n$, pero este último es $2^{n\times n} = 2^n$.

Faltaría verificar que si $m \leq p$, entonces $m^n \leq p^n$. Es suficiente observar que, si $f : Y \to Z$ es inyectiva, entonces para toda función $g : X \to Y$ tenemos $f \circ g : X \to Z$, donde $\#X = n$, $\#Y = m$, $\#Z = p$. $\square$

Observación 4.3.6. El mismo resultado vale con n un cardinal infinito arbitrario, pero su demostración depende de demostrar que $\#A = \#(A \times A)$, que a su vez depende del axioma de elección

Observación 4.3.7 (Hipótesis del continuo)**.** En la sección anterior vimos que el cardinal de $\mathbb{R}$ es igual al de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.Tenemos

$$c = 2^{\aleph_0}.$$

La hipótesis del continuo afirma que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ tiene cardinal $\aleph_0$ ó cardinal c. Cantor trató de demostrarla durante mucho tiempo, sin éxito. Luego, en 1940, Godel demostró que no podía refutarse dentro de la teoría de conjuntos de Zermelo y Fraenkel más el Axioma de Elección. Finalmente, en 1963, Cohen demostró que tampoco podía demostrarse en este contexto.

4.3.1. Solución del problema inicial

Primera solución: Sí se puede. Supongamos que vale la hipótesis del continuo. Como el $[0,1]$ sólo tiene c elementos, hay un buen ordenamiento, y los colocamos uno tras otro de manera tal que cada uno sólo tenga $\aleph_0$ predecesores. Para cada $x \in [0,1]$, sea $S(x)$ el conjunto de los $y < x$ para este buen orden. Claramente, se cumple que $y \in S(x)$ si $y < x$, ó $x \in S(y)$ si $x < y$.

Segunda solución: No se puede. Supongamos que no vale la hipótesis del continuo. Entonces, existe un conjunto $A \subset [0,1]$ cuyo cardinal es mayor a $\aleph_0$ y menor que c. Sea $B = \cup_{x \in A} S(x)$, y por aritmética de cardinales, tiene igual cardinal que A. Entonces, existe algún $y \in [0,1]$ tal que $y \notin B$, lo cual quiere decir que $y \notin S(x)$ para los $x \in A$. Pero sólo numerables elementos de A pueden pertenecer a $S(y)$, con lo cual existe algún $\hat{x} \in A$ que no está en $S(y)$, y tampoco y está en $S(\hat{x})$.

Capítulo 5

Espacios métricos

El objetivo de este capítulo es abstraer las propiedades de la distancia euclídea y generalizar la noción de distancia para definir límite y continuidad en espacios abstractos.

5.1. Definiciones básicas

Definición 5.1.1. Sea E un conjunto. Una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ se llama una *métrica* o una *distancia* sobre E si se cumple, para todo x, y, $z \in E$:

1. (separa puntos) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
2. (simetría) $d(x,y) = d(y,x)$.
3. (desigualdad triangular) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Al par (E,d) lo llamaremos un *espacio métrico* (idea de Frechet, 1906).

Observación 5.1.2. Se suele pedir también $d(x,y) \geq 0$, pero esta propiedad se desprende de las anteriores:

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y).$$

5.1.1. Ejemplos:

Funciones continuas en un intervalo cerrado

Dado un intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, llamaremos $C([a,b])$ a las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas. Podemos definir distintas métricas en este conjunto:

$$d_\infty(x,y) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|.$$

Las dos primeras propiedades de una distancia son inmediatas, para la desigualdad triangular observemos que para t fijo,

$$|x(t)-y(t)| \leq |x(t)-z(t)| + |z(t)-y(t)|,$$

y ahora usamos que el supremo de una suma es menor o igual que el supremo de cada sumando.

Otra métrica posible es la siguiente:

$$d_1(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|dt,$$

bien definida por ser funciones continuas y por lo tanto integrables. Otra vez, las dos primeras propiedades son inmediatas, y la tercera sale por la desigualdad triangular para el módulo de los números reales.

Observación 5.1.3. Los espacios métricos $(C([a,b]),d_\infty)$ y $(C([a,b]),d_1)$ son muy diferentes: compruébelo analizando la sucesión de funciones $x_n(t)$ definidas en $[0,1]$ de la siguiente manera:

$$x_n(t) = \begin{cases} 2nt & 0 \leq t \leq 1/2n, \\ 2n(1/n-t) & 1/2n < t \leq 1/n, \\ 0 & t > 1/n. \end{cases}$$

Para d_1, esta sucesión converge a la función $x(t) \equiv 0$, para d_∞ no es convergente.

Observación 5.1.4. Es más fácil considerar $x_n(t) = t^n$.

$\mathbb{R}^n$, distancia euclídea y generalizaciones

Cada punto $x = (x_1, \cdots, x_n)$ podemos pensarlo como una función de $\mathbb{I}_n$ en $\mathbb{R}$.

Además de las distancias que vimos recién, podemos tomar

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2} = \|x-y\|_2,$$

y en general,

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^p\right)^{1/p} = \|x-y\|_p,$$

para $1 \leq p < \infty$. Se tiene (ejercicio!)

$$\lim_{p\to\infty} \|x-y\|_p = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = \|x-y\|_\infty.$$

Espacio métrico discreto

Sea E arbitrario, y definimos $d(x,y) = 1$ para $x \neq y$, $d(x,x) = 0$. Verifiquemos que cumple la desigualdad triangular,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Si $x = y$, es directo.

Si $x \neq y$, queremos ver que $1 \leq d(x,z) + d(z,y)$. Si ahora $z \neq x$, $z \neq y$ tenemos $1 < 2$. Para $x = z$ resulta $z \neq y$, con lo cual vale (y el mismo razonamiento si $z = y$, con lo cual $z \neq x$).

Es importante tener en mente este ejemplo, para conjuntos E de diferentes cardinales. Sirve de contraejemplo para muchas preguntas.

Ejercicio 5.1.5. Verifique que $\mathbb{N}$ con la distancia

$$d(n,m) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \qquad n \neq m,$$

y $d(n,n) = 0$ es un espacio métrico.

La noción de distancia nos permite cambiar el problema de convergencia de sucesiones en espacios raros por el problema de convergencia de sucesiones de números:

Definición 5.1.6. Sea (E,d) un espacio métrico, y $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset E$. Decimos que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge/tiende a x, o que x es el límite de la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ cuando $n \to \infty$ si

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$$

Observación 5.1.7 (Subespacio de un espacio métrico)**.** Dado (E,d) un espacio métrico, y $A \subset E$, tenemos un nuevo espacio métrico (A,d_A), donde $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$ es la distancia d restringida a $A \times A$.

5.2. Topología en espacios métricos

De ahora en adelante, (E,d) es un espacio métrico.

5.2.1. Abiertos

Definición 5.2.1. El conjunto

$$B(x,r) = \{y \in E : d(x,y) < r\}$$

es la bola abierta de centro x y radio $r > 0$.

Definición 5.2.2. El conjunto

$$K(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}$$

es la bola cerrada de centro x y radio $r > 0$.

Observación 5.2.3. Se tiene $x \in B(x,r)$ para todo $r > 0$. Además, si $r_1 < r_2$, entonces $B(x,r_1) \subset B(x,r_2)$ (verifíquelo!).

Definición 5.2.4. Sea $A \subset E$. Decimos que x es un punto interior de A si existe algún $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A$.

Definición 5.2.5. Un conjunto G se dice abierto si cada punto de G es un punto interior de G.

Proposición 5.2.6. *Una bola abierta es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $y \in B(x,r)$. Luego, $d(x,y) < r$. Sea $r_1 = r - d(x,y) > 0$, y consideremos la bola $B(y,r_1)$ Afirmamos que está contenida en $B(x,r)$, pues si $z \in B(y,r_1)$, se tiene $d(z,y) < r_1$, y

$$d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < r_1 + d(x,y) = r - d(x,y) + d(x,y) = r,$$

y la proposición queda demostrada. □

Definición 5.2.7. Dado $A \subset E$, definimos el interior de A,

$$A^o = \{x \in A : x \text{ es un punto interio de } A\}$$

Proposición 5.2.8. *Se tienen las siguientes propiedades:*

1.- $A^o \subset A$.

2.- $A_1 \subset A_2$, *entonces* $A_1^o \subset A_2^o$.

3.- G *es abierto si y sólo si* $G = G^o$.

4.- A^o *es un conjunto abierto.*

5.- Si G *es abierto, y* $G \subset A$, *entonces* $G \subset A^o$.

Demostración. Demostremos que A^o es un conjunto abierto, los restantes son sencillos. Para esto, basta demostrar que $A^o \subset (A^o)^o$.

Si $x \in A^o$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A$. Luego, $B(x,r)^o \subset A^o$ (por 2.-). Entonces $B(x,r) \subset A^o$ pues todo punto de la bola era interior. Tenemos que $x \in (A^o)^o$ y por lo tanto, $A^o = (A^o)^o$. □

Observación 5.2.9. Tanto E como el conjunto vacío $\emptyset$ son abiertos. Medítese por qué.

Teorema 5.2.10. *La unión de cualquier familia o colección de conjuntos abiertos es abierta.*

Toda intersección de finitos conjuntos abiertos es abierta.

Demostración. Unión: sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos abiertos. Sea $U = \cup_i G_i$, y queremos ver que U es abierto.

Si $x \in U$, entonces existe i tal que $x \in G_i$. Entonces, como G_i es abierto, existe $r > 0$ tal que

$$B(x,r) \subset G_i \subset U,$$

con lo cual $B(x,r) \subset U$, y entonces $x \in U^o$.

Esto prueba que $U \subset U^o$, y por lo tanto son iguales.

Intersección: sean $G_1, \cdots, G_n$ conjuntos abiertos, y sea V su intersección, Si $x \in V$, entonces $x \in G_i$ para todo i, y por lo tanto, existen $r_1, \cdots, r_n$ tal que $B(x, r_i) \subset G_i$.

Sea $r = \text{mín}\{r_1, \cdots, r_n\}$. Tenemos $B(x,r) \subset B(x,r_i)$ para todo i, con lo cual $B(x,r) \subset G_i$ para todo i, y por lo tanto está en la intersección. Como $x \in V$ era arbitrario, tenemos $V \subset V^o$, y es abierto. $\square$

Observación 5.2.11. Si la intersección se tomara con infinitos conjuntos, la inersección puede ser vacía, o no existir una bola contenida en todos. Por ejemplo, si $G_i = (0, 1/i)$, la intersección es vacía. Si, en cambio, $G_i = (-1/i, 1/i)$, la intersección es un único punto, el 0, y no existe una bola centrada en 0 que esté incluída simultáneamente en todos los G_i.

Definición 5.2.12. Un conjunto $V \subset E$ se llama un entorno de x si existe un conjunto abierto G tal que $x \in G \subset V$.

Observación 5.2.13. El conjunto V es un entorno de x si y sólo si $x \in V^o$.

Un conjunto G es abierto si y sólo si es un entorno de cada $x \in G$.

Definición 5.2.14 (Métricas topológicamente equivalentes)**.** Sean d, d' dos méricas sobre E. Decimos que son topológicamente equivalentes si los conjuntos abiertos de (E,d) y de (E,d') son los mismos.

Teorema 5.2.15. *Sean dos métricas d, d' sobre E. Son equivalentes:*

(1) Las métricas son equivalentes.

(2) Para todo $x \in E$, y $r > 0$, existe r_1 tal que $B_{d'}(x,r_1) \subset B_d(x,r)$. Recíprocamente, existe $r_2 > 0$ tal que $B_d(x,r_2) \subset B'_d(x,r)$.

Demostración. Veamos las equivalencias.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea $x \in G^o$ para la métrica d. Entonces, existe $B_d(x,r) \subset G$, y como $B_{d'}(x,r_1) \subset B_d(x,r) \subset G$, luego $x \in G^o$ para la métrica d'. El mismo razonamiento vale intercambiando d y d'.

(2) $\Leftarrow$ (1) Si G es un abierto para ambas métricas, dado $x \in G$, existe una bola $B_d(x,r)$ que es un abierto para la métrica d, y lo es para d'. Por lo tanto, existe una bola $B_{d'}(x,r_1) \subset B_d(x,r)$. El mismo razonamiento vale intercambiando d y d'. $\square$

Teorema 5.2.16. *Sean d, d' dos métricas sobre E, y m, $M > 0$ tales que*

$$md(x,y) \leq d'(x,y) \leq Md(x,y)$$

para todo par de puntos x, $y \in E$. Entonces, ambas métricas son equivalentes.

Demostración. Dado $x \in E$, y $r_2 > 0$, sea $r = r_2M$, con lo cual si $d(x,y) < r_2$, tenemos $d'(x,y) \leq Md(x,y) \leq r_2M = r$, y por lo tanto $B_d(x,r_2) \subset B_{d'}(x,r)$. El mismo razonamiento vale para la otra inclusión. $\square$

5.2.2. Cerrados

Definición 5.2.17. Decimos que x es un punto de adherencia del conjunto $A \subset E$ si para todo $r > 0$ existe $a \in A$, tal que $a \in B(x,r)$.

Es equivalente decir que para todo $r > 0$, $A \cap B(x,r) \neq \emptyset$.

Definición 5.2.18. La clausura de A es el conjunto $\bar{A}$ formado por todos los puntos de adherencia del conjunto $A \subset E$.

Proposición 5.2.19. *Sean A, $B \subset E$.*

1.- $A \subset \bar{A}$.

2.- Si $A_1 \subset A_2$ *entonces* $\bar{A}_1 \subset \bar{A}_2$

3.- $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

4.- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Demostración. Las demostraciones de 1.- y 2.- quedan como ejercicio. En 3.- es suficiente verificar que $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$, y el argumento es que si $x \in \bar{\bar{A}}$, toda bola abierta centrada en x tiene algún punto $a \in \bar{A}$, pero ahora metemos una bola centrada en a dentro de la otra, y contiene algún punto de A.

Para demostrar 4.-, observemos que

$$A \subset A \cup B \Rightarrow \bar{A} \subset \overline{A \cup B},$$

$$B \subset A \cup B \Rightarrow \bar{B} \subset \overline{A \cup B},$$

con lo cual

$$\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

Para ver la otra inclusión, tomemos $x \in \overline{A \cup B}$, y supongamos que no pertenece a $\bar{A}$ ni a $\bar{B}$.

En tal caso, existen r_1, $r_2 > 0$ tales que

$$A \cap B(x, r_1) = \emptyset \qquad B \cap B(x, r_2) = \emptyset.$$

Tomemos $r = \text{mín}\{r_1, r_2\}$, y por lo tanto, $(A \cup B) \cap B(x, r) = \emptyset$. Esto es absurdo, porque x está en la clausura de $A \cup B$. □

Definición 5.2.20. Un conjunto se llama cerrado si $F = \bar{F}$.

Recordemos que para verificar la igualdad es suficiente probar que $\bar{F} \subset F$.

Teorema 5.2.21. *Sea $A \subset E$, e indicamos con A^c su complemento. Entonces,*

$$(\bar{A})^c = (A^c)^o.$$

Demostración. Veamos la doble inclusión.

Si $x \in (\bar{A})^c$, existe un $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Luego, $B(x, r) \subset A^c$, y $x \in (A^c)^o$.

A la inversa, si $x \in (A^c)^o$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A^c$. Luego, $x \notin \bar{A}$, y $x \in (\bar{A})^c$. □

Corolario 5.2.22. *A es cerrado si y sólo si A^c es abierto.*

Demostración. Directa de la demostración anterior. Releerla hasta estar seguro. □

Observación 5.2.23. La clausura de A es el menor cerrado que contiene a A:

1.- $A \subset \bar{A}$.

2.- Si F es un cerrado y $A \subset F$, entonces $\bar{A} \subset \bar{F} \subset F$.

Teorema 5.2.24. *La intersección de cualquier familia o colección de conjuntos cerrados es cerrada.*

Toda unión de finitos conjuntos cerrados es cerrada.

Demostración. Supongamos $\{F_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria de conjuntos cerrados, $F_i = \bar{F}_i$.

Sea $F = \cap_i F_i$, veamos que $F = \bar{F}$. Complementando,

$$F^c = (\cap_i F_i)^c = \cup F_i^c = (\cup F_i^c)^o,$$

por ser unión de abiertos. Luego, como el complemento de F es abierto, $F = \bar{F}$.

Para la unión, sale por inducción y el punto 4.- de la Proposición 5.2.19. □

Proposición 5.2.25. *Sea $a \in E$. Entonces, $\{a\}$ es cerrado.*

Demostración. Ejercicio. Recuerde que la distancia separa puntos. □

Proposición 5.2.26. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado. Entonces, $sup(A)$, $\inf(A) \in \bar{A}$.*

Demostración. Ejercicio. Recuerde que siempre existe una sucesión en un conjunto que tiende al supremo, y otra que tiende al ínfimo. □

Definición 5.2.27. Decimos que x es un punto de acumulación de A si para todo $r > 0$, el conjunto $A \cap B(x,r)$ es infinito.

Es equivalente decir que cada entorno de x contiene un punto de A distinto de x. Demuéstrelo.

Definición 5.2.28. El conjunto de puntos de acumulación de A se denomina conjunto derivado de A,

$$A' = \{x : x \text{ es un punto de acumulacion de } A\}.$$

¿Es posible que un conjunto cerrado no tenga puntos de acumulación? La respuesta es que sí, ya que $A = \{x\}$ es cerrado, y no hay infinitos puntos en A. También es posible que en un espacio no haya puntos de acumulación, por ejemplo, cuando d es la distancia discreta.

Teorema 5.2.29. *Sea $A \subset E$. Entonces, $\bar{A} = A \cup A'$.*

Demostración. Supongamos que $x \in \bar{A}$, pero $x \notin A$. Veamos entonces que $x \in A'$, es decir, $\bar{A} \setminus A \subset A'$.

Como $x \in \bar{A}$ pero $x \notin A$, en la bola $B(x,1)$ existe al menos un punto $a_1 \in A$, $a_1 \neq x$. Definimos inductivamente $r_n = d(x, a_{n-1})$, y ahora en la bola $B(x, r_n)$ existe un $a_n \in A$ distinto de x y de los a_i con $1 \leq i \leq n-1$. Luego, existen infinitos elementos de A en cualquier bola. □

Corolario 5.2.30. *Si A es cerrado, $A' \subset A$.*

Definición 5.2.31. Decimos que un conjunto A es denso en sí mismo si $A \subset A'$.

Por ejemplo, cualquier intervalo de la recta es denso en sí mismo (si no es de la forma $[a,a]$).

Definición 5.2.32. Un conjunto A se dice perfecto si es cerrado y denso en sí mismo, $A = A'$.

Ejercicio 5.2.33. Sea $\mathscr{F}(A) = \{F : F \subset A,\ F \text{ es finito}\}$. Demostrar que

$$A' = \cap_{F \in \mathscr{F}(A)} \overline{A - F}.$$

Definición 5.2.34. Dado $A \subset E$, decimos que x es un punto de la frontera de A si para todo $r > 0$, se cumple

$$B(x,r) \cap A \neq \emptyset, \quad B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset.$$

Al conjunto de puntos frontera lo llamamos ∂A.

5.3. Distancia a conjuntos

Definición 5.3.1. Dados $x \in E$, $A \subset E$ no vacío, la distancia del punto x al conjunto A se define como
$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) \ : \ a \in A\}.$$

Teorema 5.3.2. *Dado $A \subset E$, para todo x, $y \in E$ se tiene*
$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y).$$

[La función $d(\cdot,A) : E \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, si hubiéramos definido continuidad uniforme.]

Demostración. Dado $a \in A$, tenemos $d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$, con lo cual
$$inf_{a\in A}\{d(x,a)\} \leq d(x,y) + \inf_{a\in A}\{d(y,a)\},$$
y tenemos $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A)$.

Intercambiando el papel de x e y, llegamos a $d(y,A) \leq d(x,y) + d(x,A)$, y juntando ambas, como
$$d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$$
$$d(y,A) - d(x,A) \leq d(x,y),$$
se tiene $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$. □

Teorema 5.3.3. *Se tiene $d(x,A) = 0$ si y sólo si $x \in \bar{A}$.*

Demostración. Ejercicio sencillo: $x \in \bar{A}$ si y sólo si para todo $\delta > 0$ existe $a \in A$ tal que $a \in B(x,\delta)$, con lo cual $d(x,A) \leq \delta$. [En otras palabras, usamos la continuidad de la función d, si supiéramos que es continua]. □

Definición 5.3.4. Dados A, $B \subset E$, no vacíos, definimos la distancia entre ambos conjuntos como
$$d(A,b) = \inf\{d(x,y) \ : \ x \in A, \ y \in B\}.$$

Observación 5.3.5. Varios detalles para meditar:

- La distancia entre dos conjuntos no vacíos es siempre finita.
- La distancia entre dos conjuntos puede ser cero aunque no se intersequen.
- La distancia entre dos conjuntos puede ser cero aunque no se intersequen y ambos sean cerrados.

Capítulo 6

Continuidad

6.1. Sucesiones de Cauchy

Definición 6.1.1. Decimos que un conjunto $A \subset E$ es acotado si existen $x \in E$, $r > 0$ tal que $A \subset B(x,r)$.

Recordemos además que una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge a x en E si para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n \geq n_0$, tenemos $d(x,x_n) < \varepsilon$.

Definición 6.1.2. Una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ se dice de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ε) tal que si n, $m \geq n_0$, entonces $d(x_n,x_m) < \varepsilon$.

Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.1.3. *Sea (E,d) un e.m. y $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset E$.*

(1) Si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy, el conjunto $\{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.

(2) Si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy y contiene alguna subsucesión convergente, entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es convergente.

(3) Si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es convergente, entonces es de Cauchy.

Demostración. Veamos cada item.

(1) Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si n, $m \geq n_0$, entonces $d(x_n,x_m) < \varepsilon$.

Sea $d_j = d(x_{n_0},x_j$ para $1 \leq j \leq x_{n_0-1}$. Sea $M = \text{máx}\{\varepsilon, d_j\ 1 \leq j \leq n_0 - 1\}$. Entonces, $\{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \subset B(x_{n_0},M)$.

(2) Sea $\{x\}_{k\geq 1}$ una subsucesión converge a x, con lo cual dado $\varepsilon > 0$ existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$, $d(x_{n_k},x) < \varepsilon/2$.

Por otra parte, como es de Cauchy, existe n_0 tal que si n, $m \geq n_0$, tenemos $d(x_n,x_m) < \varepsilon/2$.

Sea $n \geq \text{máx}\{k_0, n_0\}$, y $n_{k_0} \leq n \leq n_k$. Entonces,

$$d(x_n,x) \leq d(x_n,x_{n_k}) + d(x_{n_k},x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(3) Si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es convergente, entonces existe n_0 tal que si $n \geq n_0$, $d(x,x_n) < \varepsilon/2$.

Sean n, $m \geq n_0$, entonces

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x) + d(x,x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y la sucesión es de Cauchy.

□

6.2. Funciones continuas

Definición 6.2.1. Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in E$, $d(x,y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Interpretemos esta definición en términos de las métricas: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in B(x,\delta)$, entonces $f(y) \in B(f(x),\varepsilon)$.

Es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$.

Podemos reescribir esta definición de manera topológica:

Definición 6.2.2. Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si para cada entorno V de $f(x)$ en E', existe un entorno U de x en E tal que $f(U) \subset V$.

Decir que $f(U) \subset V$ es equivalente a decir que $U \subset f^{-1}(V)$, con lo cual podemos afirmar que para cada entorno V de $f(x)$, la imagen inversa f^{-1} es un entorno de x.

Definición 6.2.3. Una función $f : E \to E'$ es continua en E si es continua en todo punto $x \in E$.

Teorema 6.2.4. *Una función $f : E \to E'$ es continua si la preimagen de un abierto en E' es abierto en E.*

Demostración. Veamos las dos implicaciones

$\Rightarrow$) ejercicio. [Hay que tomar V abierto en E', y verificar que $U = f^{-1}(V)$ es abierto en E. Para eso, dado $x \in E$ con $f(x) \in V$, al ser V abierto existe ε tal que

$B(f(x),\varepsilon) \subset V$, pero como f es continua en x, existe δ tal que si $y \in B(x,\delta)$, entonces $f(y) \in B(f(x),\varepsilon)$, y por lo tanto $B(x,\delta) \subset U$. Esto vale para todo punto de U, con lo cual es abierto.]

$\Leftarrow$) también. [Este es más fácil: tomen $V = B(f(x),\varepsilon)$ en E', y si $x \in U = f^{-1}(V)$, como U es abierto, existe una bola de radio δ tal que $x \in B(x,\delta) \subset U$, pero entonces, $f(B(x,\delta) \subset V = B(f(x),\varepsilon)$.] □

Complementando, vale cambiando abiertos por cerrados.

Teorema 6.2.5. *Una función f es continua en x si y sólo si transforma cualquier sucesión convergente a x en una sucesión convergente a $f(x)$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Como f es continua en x, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces $d'(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

Como la sucesión es convergente, existe $n_0(\delta)$ tal que para todo $n \geq n_0$, se tiene $d(x,x_n) < \delta$. Entonces, $d'(f(x_n),f(x)) < \varepsilon$, con lo cual $f(x_n) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$.

$\Leftarrow$) Supongamos que f no es continua en x. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existe y tal que $d(x,y) < \delta$ pero $d'(f(x),f(y)) > \varepsilon$.

Tomando $\delta = 1/n$, existe un x_n tal que $d(x,x_n) < \delta$ pero $d'(f(x),f(x_n)) > \varepsilon$. Con lo cual conseguimos una sucesión $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, pero $f(x_n) \not\to f(x)$. Absurdo, ya que por hipótesis $f(x_n) \to f(x)$. □

Teorema 6.2.6. *Una función $f : E \to E'$ es continua si para todo $A \subset E$,*

$$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Demostración. Otro ejercicio, pero más fácil. □

Vimos que para que una función sea continua en un punto x, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$. Este δ depende tanto de ε como del punto x donde miramos la continuidad.

Si podemos tomar δ independiente del punto x, tenemos el concepto de continuidad uniforme:

Definición 6.2.7. Una función $f : E \to E'$ se dice uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe δ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces $d'(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

Teorema 6.2.8. *Sea $f : E \to E'$ tal que existe $C > 0$ y*

$$d'(f(x),f(y)) \leq d(x,y).$$

Entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon/C$, y listo. □

Ejemplo 6.2.9. Sea $F : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con $d(f,g) = \sup_{a\leq t\leq b} |f(t) - g(t)|$,

$$F(f) = \int_a^b f(t)dt.$$

Dadas f, $g \in C([a,b],\mathbb{R})$, tenemos

$$|F(f) - F(g)| = |\int_a^b (f(t) - g(t))dt| \leq \int_a^b |f(t) - g(t)|dt$$

$$\leq \int_a^b d(f,g)dt = (b-a)d(f,g),$$

y por lo anterior es uniformemente continua.

Definición 6.2.10. Sea $f : E \to E'$ biyectiva, continua y tal que su inversa también es continua. En tal caso, diremos que f es un homeomorfismo.

Observación 6.2.11. Dado un homeomorfismo $f : E \to E'$, y los abiertos de E, sabemos quiénes son los abiertos de E': basta calcular las imágenes $f(G)$ con $G \subset E$ abierto.

Definición 6.2.12. Sea $f : E \to E'$ biyectiva tal que $d(x,y) = d'(f(x), f(y))$. En tal caso, diremos que f es una isometría.

Observación 6.2.13. Dada f biyectiva, es posible que sea continua pero que su inversa no lo sea

6.2.1. Semicontinuidad

Definición 6.2.14. Sea $f : E \to \mathbb{R}$. Sea $M_\delta f(x_0) = \sup\{f(x) \colon x \in B(x_0,\delta) \cap E\}$. El límite superior de f en x_0 es

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\delta\to 0} M_\delta(f(x_0)) = \inf_{\delta>0} \sup_{x\in B(x_0,\delta)\cap E} f(x).$$

Definición 6.2.15. Sea $f : E \to \mathbb{R}$. Sea $m_\delta f(x_0) = \inf\{f(x) \colon x \in B(x_0,\delta) \cap E\}$. El límite inferior de f en x_0 es

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\delta\to 0} m_\delta(f(x_0)) = \sup_{\delta>0} \inf_{x\in B(x_0,\delta)\cap E} f(x).$$

Observación 6.2.16. Observemos que si $\delta_1 < \delta_2$, tenemos

$$M_{\delta_1} f(x_0) < M_{\delta_2} f(x_0),$$

$$m_{\delta_1} f(x_0) > m_{\delta_2} f(x_0).$$

Luego, ambos límites existen por la monotonía de M y m.

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 6.2.17. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$. F es continua en x_0 si y sólo si*

$$liminf_{x\to x_0} f(x) = limsup_{x\to x_0} f(x).$$

Demostración. Ejercicio. □

Definición 6.2.18. Sea $f : E \to \mathbb{R}$. Decimos que f es semicontinua superiormente (s.s.) en x_0 si

$$f(x_0) \geq \limsup_{x\to x_0} f(x).$$

Decimos que f es semicontinua inferiormente (s.i.) en x_0 si

$$f(x_0) \leq \liminf_{x\to x_0} f(x).$$

Teorema 6.2.19. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in E$. Son equivalentes:*

(1) F es s.i. en E.

(2) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) \leq a\}$ es cerrado.

(3) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) > a\}$ es abierto.

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 6.2.20. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in E$. Entonces,*

- *F es s.i. en E.*
- *Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) \leq a\}$ es cerrado.*

Demostración. Ejercicio. □

Capítulo 7

Separabilidad

7.1. Estructura de los conjuntos abiertos

Muchas propiedades topológicas de un espacio se caracterizan a través de los abiertos que posee, o de ciertos subconjuntos especiales. Vamos a estudiar aquí la separabilidad, que generaliza ciertas propiedades derivadas de la existencia de $\mathbb{Q}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$.

7.1.1. Estructura de los conjuntos abiertos de la recta real

En general es difícil caracterizar los conjuntos abiertos para un espacio métrico cualquiera. En el caso de la recta, tenemos una caracterización en términos de intervalos, incluyendo los de la forma $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,+\infty)$.

Definición 7.1.1. Sea $G \subset \mathbb{R}$ abierto. Un intervalo $I = (a,b)$ se llama un intervalo componente de G si cumple:

1.- $I \subset G$,

2.- $a \notin G$, $b \notin G$.

Observemos primero que dos intervalos componentes de un conjunto G son iguales o disjuntos: si $x \in (a,b) \cap (c,d)$, y tenemos $a < c < x$, debe ser $c \in (a,b) \subset G$, pero por definición de intervalo componente, $c \notin G$. De la misma manera, no puede ser $c < a < x$, con lo cual tenemos $a = c$. Un razonamiento análogo $b = d$.

Ahora, dada $\mathbb{C} = \{(a_i,b_i) : i \in I\}$ una familia de intervalos componentes disjuntos, podemos definir $f : \mathbb{C} \to \mathbb{Q}$, que a cada intervalo (a_i,b_i) le asigna un racional $q_i \in (a_i,b_i)$. Como esta función es inyectiva, $\#I \leq \#\mathbb{C}$, y resulta a lo sumo numerable.

Veamos ahora que todo punto de un abierto G pertenece a un intervalo componente. Dado $x \in G$, definimos

$$a = \sup\{y : y < x, y \in G^c\}, \qquad b = \text{ínf}\{z : z > x, z \in G^c\}.$$

El intervalo $(a,b) \subset G$, pero a, $b \notin G$, con lo cual es un intervalo componente. Luego, a cada $x \in G$, le asignamos un intervalo componente que lo contiene.

Formalicemos este razonamiento.

Teorema 7.1.2. *Sea $G \subset \mathbb{R}$ abierto. Entonces, se escribe con una unión contable de intervalos abiertos disjuntos.*

Demostración. Dado $x \in G$, definimos

$$a_x = \text{ínf}\{y : (y,x) \subset inG\}, \qquad b_x = \sup\{z : (x,z) \subset G\}.$$

Claramente, $I_x = (a_x, b_x) \subset G$, pero a_x, $b_x \notin G$, o de lo contrario, por ser G un abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a_x - \varepsilon, x)$ y $(x, b_x + \varepsilon)$ estarían contenidos en G, contradiciendo que eran el ínfimo y el supremo.

Supongamos que $I_x = (a_x, b_x)$ e $I_y = (a_y, b_y)$ tienen intersección no vacía, veamos que son iguales. Como existe $x \in I_x \cap I_y$, tenemos

$$a_x < z < b_x,$$

$$a_y < z < b_y.$$

Probemos que $a_x = a_y$. Si $a_x > a_y$, tendríamos $a_y < a_x < z < b_y$, con lo cual $a_x \in G$ contradice lo anterior (los bordes no estaban). Luego, $a_x \leq a_y$, y tampoco puede ser $a_x < a_y$, por la misma razón, con lo cual $a_x = a_y$. Para b_x y b_y es lo mismo.

Tenemos

$$G = \cup_{x \in G}\{x\} \subset \cup_{x \in G} I_x,$$

y seleccionemos una familia de conjuntos disjuntos $\mathscr{I} \subset \{I_x : x \in G\}$ que cubran G. Definimos $f : \mathscr{I} \to \mathbb{Q}$, que cumpla $f(I) \in I$. Como es inyectiva, $\mathscr{I}$ es contable. $\square$

Observación 7.1.3. Observe que las definiciones de a y a_x, b y b_x en la motivación y en la demostración del teorema fueron diferentes, aunque podíamos usar cualquiera para demostrar el teorema.

Observación 7.1.4. Motivación de densos, bases de abiertos, y cubrimientos numerables, etc. vía $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Observar que si (a,b) es un intervalo componente, se escribe como unión (no disjunta) (a_n, b_n) de extremos racionales, y que el conjunto de todos los intervalos de extremos racionales es numerable:

$$\{(q_1, q_2) \colon q_i \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}.$$

7.2. Densidad y bases de abiertos

Sea (E,d) un espacio métrico, y sea $\mathscr{G}$ la colección de todos los conjuntos abiertos de E. Sea también

$$\mathscr{B} = \{B(x,r) : x \in E,\ r > 0\}.$$

Claramente, $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$.

Definición 7.2.1. Una familia de abiertos se dice una base de $\mathscr{G}$ si todo $G \in \mathscr{G}$ se escribe como unión de conjuntos de la familia.

Ejemplo 7.2.2. Por la sección anterior, en $\mathbb{R}$ con la distancia dada por $|\cdot|$, los intervalos abiertos (a,b) forman una base.

Teorema 7.2.3. *En todo espacio métrico, $\mathscr{B}$ es una base de abiertos de $\mathscr{G}$.*

Demostración. Sea $G \in \mathscr{G}$. Para todo $x \in G$, existe $B_x \in \mathscr{B}$ tal que $B_x \subset \mathscr{G}$. Claramente,

$$\cup_{x\in G} B_x \subset G, \qquad G \subset \cup_{x\in G} B_x.$$

$\square$

Teorema 7.2.4. *En todo espacio métrico, $\mathscr{B}$ es una base de abiertos si y sólo si para todo G abierto y todo $x \in G$, existe $B_x \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_x \subset G$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Como $\mathscr{B}$ es una base de abiertos, todo abierto es unión de conjuntos de $\mathscr{B}$, y si $x \in G \subset \cup_i B_i$, debe ser $x \in B_{i_0}$ al menos para algún i_0.

$\Leftarrow$) Tenemos

$$G = \cup_{x\in G}\{x\} \subset \cup_{x\in} B_x \subset \cup_{x\in G} G = G.$$

$\square$

Teorema 7.2.5. *En todo espacio métrico, $\mathscr{B}$ es una base de abiertos si y sólo si para todo $x \in E$ y todo entorno V de x, existe $B_x \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_x \subset V$.*

Demostración. Ejercicio. Recuerde que si G es un abierto y $x \in G$, entonces G es un entorno de x. Para el otro lado, observe que si V es un entorno de x, existe un abierto G tal que $x \in G \subset V$, y haga la traducción a la demostración anterior. $\square$

Observación 7.2.6. Abiertos de un subespacio $A \subset E$.

Sea $x \in A$, $r > 0$.

$$\tilde{B}(x,r) = \{y \in A \ :\ d(y,x) < r\} = A \cap B(x,r).$$

Dado $\tilde{G} \in \mathscr{G}_A$, tenemos

$$\tilde{G} = \cup_{i\in I} \tilde{B}_i = \cup_{i\in I}(A \cap B_i) = A \cap (\cup_{i\in I} B_i) = A \cap G$$

con $G \in \mathscr{G}$.

De la misma manera, un entorno de un punto x en un subespacio es $\tilde{W}$ es la intersección de un entorno de x en E intersecado con A.

Definición 7.2.7. Sea $A \subset E$ tal que $\bar{A} = E$. Decimos que A es denso en E.

Ejemplo 7.2.8. El ejemplo más sencillo es $\mathbb{Q}$, que es denso en $\mathbb{R}$.

Observación 7.2.9. Mentira: el ejemplo más sencillo es el propio espacio E, lo que ocurre es que este ejemplo no sirve para nada.

Teorema 7.2.10. *El conjunto A es denso en E si y solo si para todo $x \in E$, y todo $r > 0$, existe $a \in A \cap B(x,r)$.*

Demostración. Veamos las implicaciones.

$\Rightarrow)$: como $E = \bar{A}$, para todo $x \in E$ y todo $r > 0$, existe $a \in A \cap B(x,r)$.

$\Leftarrow)$: sea $x \in E$ tal que para todo $r > 0$ existe $a \in A \cap B(x,r)$. Entonces, $x \in \bar{A}$. Luego, tenemos $E \subset \bar{A} \subset E$, ambos conjuntos son iguales. □

Ejercicio 7.2.11. Trate de convencerse de que todo punto de E es un punto de acumulación del conjunto A.

Ejercicio 7.2.12. Si se convenció, desconvénzase, relea las definiciones desde el principio del capítulo y verifique que podrían existir puntos en E que no sean de acumulación del conjunto A. Sugerencia: piense qué ocurre con los puntos aislados.

Teorema 7.2.13. *Si A es denso en B, y B es denso en E, entonces A es denso en E.*

Demostración. Sea $x \in E$. Para todo $r > 0$, existe $b \in B$ tal que $b \in B(x,r)$ pues $x \in \bar{B}$. Pero $b \in \bar{A}$, con lo cual tomando $r_1 = r - d(x,b)$, tenemos algún elemento $a \in A$ tal que $a \in B(b,r_1) \subset B(x,r)$. Luego, $x \in \bar{A}$, y $\bar{A} = E$. □

Ejemplo 7.2.14. Sea $\ell_1 = \{a = \{a_n\}_{n\geq 1} \ : \ \sum |a_n| < \infty\}$, con la distancia

$$d(a,b) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} |a_n - b_n|.$$

Definamos $A = \{a \in \ell_1 \ : \ \text{existe } n_0(a),\ a_n = 0 \text{ si } n \geq n_0\}$.

Sea $a \in \ell_1$, y dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_n < \varepsilon.$$

Sea $a' \in A$ con $a'_n = a_n$ si $n \leq n_0$ y $a'_n = 0$ sin $n \geq n_0$. Como $d(a,a') < \varepsilon$, vemos que A es denso en ℓ_1.

Definamos $A_{\mathbb{Q}} = \{a \in A \ : \ a_n \in \mathbb{Q}\}$. Dada $a' \in A$ existe n_0 tal que $a'_n = 0$ si $n \geq n_0$, y tomamos $a_Q \in A_{\mathbb{Q}}$ tal que $d(a', a_q) < \varepsilon$, eligiendo

$$(a_Q)_n \in \mathbb{Q}, \quad |(a_Q)_n - a'_n| < \frac{\varepsilon}{2n_0} \text{ si } n < n_0$$

y cero si $n \geq n_0$.

Luego, $A_{\mathbb{Q}}$ es denso en A.

7.3. Separabilidad

Definición 7.3.1. Un espacio E se llama separable si contiene un subconjunto A numerable y denso.

Ejemplo 7.3.2.

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es separable pues $\mathbb{Q}$ es numerable y denso.
- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ es separable. Sea $A = \mathbb{Q}^n = \{(a_1, \cdots, a_n\}$ con $a_i \in \mathbb{Q}$. Fijado $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, y $r > 0$, veamos que existe $a \in A$ tal que $\|x - a\|_2 < r$.

  Para esto, dado x_i, tenemos $a_i \in Q$ tal que $|x_i - a_i| < r/\sqrt{n}$. Entonces,

$$\|x-a\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2\right)^{1/2} < \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{r^2}{n}\right)^{1/2} < \left(n \cdot \frac{r^2}{n}\right)^{1/2} < r.$$

- El espacio ℓ_1 es separable (ver el ejemplo de la sección anterior, donde vimos que A_Q era denso en ℓ_1). Faltaría ver que A_Q es numerable: para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $A_Q^{(n)}$ las sucesiones que valen 0 después del enésimo lugar. Tenemos $f : A_Q^{(n)} \to \mathbb{Q}^n$, definida como

$$f(a_1, \cdots, a_n, 0, 0, 0, \cdots) = (a_1, \cdots, a_n),$$

  que es inyectiva (verifíquelo!) y como $\mathbb{Q}^n$ es numerable, $A_Q^{(n)}$ también. Finalmente, $A_{\mathbb{Q}} = \cup_{n\geq 1} A_Q^{(n)}$, es numerable por ser unión numerable de numerables.
- Sea E un conjunto no numerable con la métrica discreta. En tal caso, $B(x,1) = \{x\}$, el único conjunto denso es el propio E, por lo tanto no es separable.
- Sea $\ell_\infty = \{a = \{a_n\}_{n\geq 1} : \sup_n |a_n| < \infty\}$, con la distancia $d(a,a') = \sup_n |a_n - a'_n|$. Este espacio no es separable. Para comprobarlo, sea $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, y a_A una sucesión de ceros y unos tal que $a_n = 0$ si $n \notin A$, y $a_n = 1$ si $n \in A$. Tenemos un conjunto no numerable de sucesiones, y $d(a_A, a_B) = 1$ para todo $A \neq B$.

Teorema 7.3.3. *Sea (E,d) separable. Entonces, hay una base numerable de conjuntos abiertos.*

Demostración. Sea $A \subset E$ un conjunto numerable y denso en E. Sea

$$\mathscr{B}_o = \{B(a,q) : a \in A, q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathscr{B}.$$

Veamos que para todo abierto $G \subset E$, tenemos

$$G = \cup_{i\in I} B(a_i, q_i).$$

Ya vimos que para cada $x \in G$ existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset G$. Como A es denso, existe a tal que $d(x,a) < r/2$, y entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $d(x,a) < q < r/2$. Probemos que

$$B(a,q) \subset B(x,r), \qquad x \in B(a,q).$$

Claramente, $d(a,x) < q$ así que $x \in B(a,q)$. Ahora, si $y \in B(a,q)$, tenemos

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < r/2 + q < r/2 + r/2 = r,$$

con lo cual $y \in B(x,r)$. Luego, $G = \cup_{x \in G} B(a_i(x), q_i)$, y G se puede escribir como unión de elementos de la familia $\mathscr{B}_o$. □

El siguiente resultado no es completamente evidente. Si cree que sí, reflexione: tal vez está pasando algo por alto (bah, creo). Cómo será que el concepto tiene nombre propio.

Teorema 7.3.4. *Sea (E,d) un espacio métrico separable y $\mathscr{C}$ una colección de conjuntos abiertos. Entones, existe una subcolección numerable $\mathscr{C}_o \subset \mathscr{C}$ tal que*

$$\cup \mathscr{C} = \cup \mathscr{C}_o.$$

[Todo cubrimiento por abiertos tiene un subcubrimiento numerable.]

Demostración. Sea $\mathscr{B}_o$ una base numerable de conjuntos abiertos. Sea

$$\mathscr{B}_o(\mathscr{C}) = \{B \in \mathscr{B}_o \ : \ B \subset G \in \mathscr{C} \text{ para algún } G\}.$$

Tenemos entonces

$$\cup \mathscr{C} = \cup \mathscr{B}_o(\mathscr{C}),$$

pues si $x \in \cup \mathscr{C}$, entonces $x \in G \in \mathscr{C}$, y entonces para algún conjunto B de la base, $x \in B \in \mathscr{B}_0$.

Dado $B \in \mathscr{B}_o$, elegimos un $G \in \mathscr{C}$ tal que $B \subset G$. Como la colección $\mathscr{B}_o(\mathscr{C})$ es numerable, seleccionamos una colección $\mathscr{C}_o$ con a lo sumo numerables conjuntos G de $\mathscr{C}$,.

Tenemos $\cup \mathscr{C}_o \subset \cup \mathscr{C}$ por estar contenidos en la colección original. Además, como

$$\cup \mathscr{C} = \cup \mathscr{B}_o(\mathscr{C}) \subset \cup_{G \in \mathscr{C}_o} G$$

tenemos la otra inclusión. □

Definición 7.3.5. Sea (E,d) un e.m. tal que todo cubrimiento por abiertos contiene un subcubrimiento numerable. En tal caso, decimos que E es Lindelof.

Teorema 7.3.6. *Sea (E,d) un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.- (E,d) *es separable.*

2.- Existe una base numerable de conjuntos abiertos.

3.- Todo cubrimiento por abiertos contiene un subcubrimiento numerable. (Lindelof)

Demostración. Veamos las implicaciones entre estas afirmaciones.

$(1) \Rightarrow (2)$: ya lo demostramos. Si A es un conjunto denso numerable, las bolas $B(a,q)$ centradas en $a \in A$, con radio $q \in \mathbb{Q}$ es una base numerable.

$(2) \Rightarrow (3)$: es la demostración anterior, escribimos cada abierto del cubrimiento como una unión de conjuntos de la base numerable, y ahora a cada bola le asignamos uno de los abiertos del cubrimiento donde está contenida.

$(3) \Rightarrow (1)$: Aprovechando que existen subcubrimientos numerables, cubrimos E con bolas de radio $1/n$ centradas en cada punto de E, y para cada n, extraemos un subcubrimiento numerable y formamos el conjunto A con sus centros:

$$E = \cup_{k\geq 1} B(x_k^{(1)}, 1), \cdots, E = \cup_{k\geq 1} B(x_k^{(n)}, 1/n), \cdots$$

$$A = \cup_{k\geq 1} \cup_{n\geq 1} \{x_k^{(n)}\}.$$

Tenemos que A es numerable, y denso. □

Ejercicio 7.3.7. Comprobar que un subespacio de un espacio separable también lo es.

Sugerencia: considere una base de abiertos numerable, e interséquelos con el subespacio.

Definición 7.3.8. Sea $A \subset E$, decimos que $x \in A$ es un punto de condensación si para todo abierto G tal que $x \in G$, el conjunto $G \cap A$ no es numerable.

Recordemos que x era un punto de acumulación de A si para todo $r > 0$, el conjunto $A \cap B(x,r)$ era infinito, acá pedimos aún más.

Teorema 7.3.9. *Sea (E,d) separable, y A no contable. Entonces, existe al menos un punto de acumulación $x \in A$.*

Demostración. Supongamos que no ocurre, y por lo tanto para todo $a \in A$ existe G_a abierto tal que $A \cap G_a$ es contable.

Como $A \subset E$ separable, A es separable, y podemos extraer un subcubrimiento numerable de la familia de abiertos $\{G_a \colon a \in A\}$ que cubre A, sean $\{G_{a_n}\}_{n\geq 1}$.

Pero $A \subset \cup_{n\geq 1} G_{a_n}$ sería unión numerable de conjuntos contables, contradice que no era contable. □

Capítulo 8

Completitud

A lo largo de este capítulo, (E,d) y (E',d') son espacios métricos no necesariamente distintos. También, siempre que consideremos un conjunto A, suponemos $A \subset E$.

8.1. Completitud

Comencemos recordando la definición de sucesión de Cauchy.

Definición 8.1.1. Una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ se dice de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ε) tal que si n, $m \geq n_0$, entonces $d(x_n,x_m) < \varepsilon$.

Observe que, en tal caso,

$$\lim_{n,m\to+\infty} d(x_n,x_m) = 0.$$

Definición 8.1.2. Un espacio métrico (E,d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto $x \in E$.

Ejemplo 8.1.3. $\mathbb{R}$ es completo (y en general, $\mathbb{R}^n$), pues toda sucesión de Cauchy es acotada, toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión convergente, y por último, si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, toda la sucesión es convergente.

Ejemplo 8.1.4. El espacio $C([0,1])$ es completo con

$$d(u,v) = \max_{t\in[0,1]} |u(t) - v(t)|.$$

Dada una sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\geq 1}$, veamos que converge a $x \in C([0,1])$. Para esto, observemos que dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$\max_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$

si $n, m \geq n_0$. En particular, para cada t fijo, la sucesión de números reales $\{x_n(t)\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy, y por la completitud de los reales, converge a cierto $x(t)$.

Definimos así una función x como límite puntual de las x_n, pero debemos demostrar todavía que es el límite con la distancia d, y que x es una función del espacio, es decir, que x es continua.

Para lo primero, observemos que $\max_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ si $n, m > n_0$, por ser de Cauchy, con lo cual, si tomamos límite cuando m tiende a infinito, $|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$ para todo $t \in [0,1]$. En otras palabras, $d(x_n, x) \leq 0$.

Veamos ahora que x es continua. Por lo anterior, como $|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$ si $n \geq n_0$, para todo $t \in [0,1]$, si fijamos $t_0 \in [0,1]$ tenemos

$$\begin{aligned}|x(s) - x(t_0)| &\leq |x(s) - x_n(s)| + |x_n(s) - x_n(t_0)| + |x_n(t_0) - x(t_0)| \\ &\leq 2\varepsilon + |x_n(s) - x_n(t_0)|\end{aligned}$$

y vemos que x es una función continua en t_0 pues x_n lo es, y tomando $|s - t_0| < \delta$ tenemos $|x_n(t_0) - x_n(s)| < \varepsilon$.

Ejemplo 8.1.5. El espacio $C([0,2])$ no es completo con $d(u,v) = \int_0^2 |u(t) - v(t)|dt$.

Para esto basta mostrar una sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ de Cauchy cuyo límite no sea una función continua. Tomemos $u_n(x) = x^n$ si $x \in [0,1]$, y $u_n(x) = 1$ si $x \in [1,2]$. Verifique que esta sucesión converge a la función $u(x) = 0$ si $x \in [0,1]$, y $u(x) = 1$ si $x \in [1,2]$, que no es continua.

Definición 8.1.6. Dado $A \subset E$, con $A \neq \emptyset$, se define su diámetro

$$\delta(A) = \sup\{d(x,y) \ : \ x \in A, y \in A\}.$$

Teorema 8.1.7 (Principio de encaje de Cantor)**.** *Sea (E,d) un e.m. completo, y una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, tales que $\delta(A_j) \to 0$ cuando $j \to \infty$, entonces existe $x \in E$ tal que cada para todo $\varepsilon > 0$,*

$$A_n \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset \quad \forall n.$$

Además, existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que para todo $n \geq n_0$, $A_n \subset B(x,\varepsilon)$.

Demostración. Como los A_n son no vacíos, podemos elegir $a_n \in A_n$. Además, como A_n, $A_m \subset A_{n_0}$ para $n_0 < n$, m, tenemos que es una sucesión de Cauchy, ya que $d(a_n, a_m) \leq \delta(A_{n_0})$.

Como (E,d) es un e.m. completo, existe $x \in E$ tal que $a_n \to x$ cuando $n \to \infty$.

Ahora, dado $\varepsilon > 0$, como los diámetros tienden a cero y la sucesión converge, existen

- n_1 tal que $\delta(A_n) < \varepsilon/2$ si $n > n_1$;

- n_2 tal que $d(a_n,x) < \varepsilon/2$ si $n > n_2$.

Sea $n \geq n_1, n_2$. Si $a \in A_n$,

$$d(x,a) \leq d(x,a_n) + d(a_n,a) < \varepsilon,$$

con lo cual $A_n \subset B(x,\varepsilon)$. □

Teorema 8.1.8 (Principio de encaje de Cantor)**.** *Sea (E,d) un e.m. completo, y una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, tales que $\delta(A_j) \to 0$ cuando $j \to \infty$, entonces existe un único $x \in \cap_n \bar{A}_n$.*

Demostración. Sea x el del teorema anterior, con lo cual $x \in \bar{A}_n$ para todo n. Si no, existiría algún ε, tal que $B(x,\varepsilon) \cap A_n = \emptyset$, y como los demás conjuntos están encajados en A_n, se contradice el teorema anterior. □

Ejemplo 8.1.9. Consideremos los números naturales con la distancia definida como

$$d(n,m) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

si $n \neq m$, y cero si son iguales. [Ejercicio: verifique que es una distancia]

Consideremos $K(n, 1+2/n) = \{n, n+1, n+2, \cdots\}$. Estos son conjuntos cerrados, acotados, encajados, pero su intersección es vacía. ¿Qué falló?

Ejemplo 8.1.10. Ok, en el ejercicio anterior el diámetro de los conjuntos no tiende a cero. Cambie la distancia a

$$d(n,m) = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

si $n \neq m$, y cero si son iguales. [Ejercicio: verifique que es una distancia]

Consideremos $K(n, 1+2/n) = \{n, n+1, n+2, \cdots\}$. Estos son conjuntos cerrados, acotados, encajados, pero su intersección es vacía. ¿Qué falla ahora?

Definición 8.1.11. Sea (E,d) un e.m. El subespacio (A,d_A) es un subespacio cerrado si A es cerrado en E.

Teorema 8.1.12. *Si (E,d) es un e.m. completo, todo subespacio cerrado es completo.*

Demostración. Sea $A \subset E$ cerrado, y una sucesión de Cauchy $\{a_n\}_{n\geq 1}$, esto es, $d_A(a_n,a_m) \to 0$ cuando n, $m \to \infty$. Luego, la sucesión es de Cauchy en E, y como E es completo, existe $x \in E$ tal que $a_n \to x$ cuando $n \to \infty$.

Entonces, $x \in \bar{A} = A$, y A es completo □

Teorema 8.1.13. *Si $A \subset E$ es un subespacio completo, entonces es cerrado.*

Demostración. Sea $A \subset E$, A completo. Sea $x \in \bar{A}$, entonces existe $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset A$ tal que $a_n \to x$. Como es una sucesión convergente, es de Cauchy en el subespacio A, y por la completitud, existe $a \in A$ tal que $a_n \to a$.

Luego, $d_A(a, a_n) = d(a, a_n) \to 0$, y tenemos $a_n \to a$ y $a_n \to x$ en E, con lo cual $a = x$, $x \in A$ y resulta $A = \bar{A}$. □

Ejemplo 8.1.14. Sea ℓ_∞ el conjunto de sucesiones acotadas,

$$\ell_{\text{ínf}} = \{\{x_n\}_{n\geq 1} \ : \ \sup_n |x_n| < \infty\}$$

con la distancia $d(\{x_n\}_{n\geq 1}, \{y_n\}_{n\geq 1}) = \sup_n |x_n - y_n|$.

Sea C el conjunto de las sucesiones convergentes. Entonces, es un subespacio cerrado de ℓ_∞.

8.2. Conjuntos acotados y totalmente acotados

Recordemos que el diámetro de $A \subset E$, con $A \neq \emptyset$, es

$$\delta(A) = \sup\{d(x,y) \ : \ x \in A, y \in A\}.$$

Definición 8.2.1. Dado $A \subset E$, con $A \neq \emptyset$, decimos que es acotado si $\delta(A) < \infty$.

Teorema 8.2.2. *Sea $A \subset E$. Entonces, A es acotado si y sólo si A está contenido en una bola.*

Demostración. Supongamos A acotado. Dado $a \in A$, tenemos, para todo $x \in A$,

$$x \in K(a, \delta(A)) \subset B(a, \delta(A+1)).$$

Luego, todo conjunto acotado está incluido en una bola.

A la inversa, si A está contenido en la bola $B(x,r)$, sean a, $b \in A$, y tenemos

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) \leq 2r,$$

con lo cual el diámetro de A es finito. □

Ejemplo 8.2.3. Sea $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ a_i \leq x_i \leq b_i, \quad 1 \leq i \leq n\}$. Calculemos $\delta(R)$. Si x, $y \in R$,

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}.$$

En particular, si $b_i - a_i = L$ para todo $1 \leq i \leq n$, tenemos $\delta(R) = \sqrt{n}L$.

Ejercicio 8.2.4. ¿Qué ocurre si los intervalos (a_i, b_i) son abiertos?

Proposición 8.2.5. *La unión de finitos conjuntos acotados es acotada.*

Demostración. Alcanza con considerar dos conjuntos, si hay más, utilice inducción. Veamos que

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B).$$

Tomemos dos puntos en la unión, y acotemos su distancia. Claramente, para ambos en A o ambos en B, acotamos con $\delta(A)$ o $\delta(B)$. Sean entonces $x \in A$, $y \in B$, y tomemos otros dos puntos $a \in A$, $b \in B$, con lo cual tenemos

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y),$$

por la desigualdad triangular. Entonces,

$$d(x,y) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(a,b).$$

Tomando ínfimo en ambos lados para $a \in A$, $b \in B$, tenemos

$$d(x,y) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B).$$

Por último, tomando supremo en $x \in A$ e $y \in B$, tenemos que el diámetro de la unión está acotado. $\square$

Proposición 8.2.6. *Todo conjunto A finito es acotado.*

La demostración, que $\delta(A) \leq \max\{d(a,a') \ : \ a,a' \in A\}$ no merece ser escrita.

Proposición 8.2.7. *Toda sucesión convergente es acotada.*

Demostración. Sea $x_n \to x$ en E. Fijamos ε, y existe n_0 tal que $x_n \in B(x,\varepsilon)$ si $n > n_0$. Como la sucesión está contenida en $B(x,\varepsilon) \cup \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_{n_0}\}$, que es acotado por ser unión de acotados, resulta acotada. $\square$

Proposición 8.2.8. *Sea $A \subset E$. Entonces, $\delta(A) = \delta(\bar{A})$.*

Demostración. Ejercicio. Por un lado, como $A \subset \bar{A}$, tenemos que

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y) \leq \sup_{x,y \in \bar{A}} d(x,y) = \delta(\bar{A}).$$

Para ver que es igual, tome (a_n, a_n') tal que $d(a_n, a_n') \to \delta(\bar{A})$, y para ε dado, tome x, $y \in A$ tales que $d(a_n, x) < \varepsilon/2$, $d(a_n', y) < \varepsilon/2$, argumente que

$$\delta(A) - \varepsilon \leq d(a_n, a_n') \leq d(a_n, x) + \delta(A) + d(y, a_n') \leq \delta(A) + \varepsilon$$

y concluya. $\square$

Definición 8.2.9. Un conjunto $A \subset E$ se dice totalmente acotado si para cada $\varepsilon > 0$ es posible escribir A como una unión finita de conjuntos de diámetro menor que ε:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad A = \cup_{j=1}^{m} A_j, \quad \delta(A_j) < \varepsilon \text{ para } 1 \le j \le m.$$

Abreviaremos tt.a.

Ejercicio 8.2.10. Es equivalente decir que cubrimos A con un número finito de bolas de radio ε. ¿Por qué?

Teorema 8.2.11. *Sean A, $B \subset E$. Entonces:*

(1) A es tt.a. y $B \subset A$, entonces B es tt.a.

(2) A es tt.a. si y sólo si $\bar{A}$ es tt.a.

(3) A, B son tt.a., entonces $A \cup B$ es tt.a.

(4) A es tt.a., entonces A es acotado.

Demostración. (1) Dado ε tenemos $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$ con $\delta(A_i) < \varepsilon$ para $1 \le i \le n$, los conjuntos $B_i = A_i \cap B$ cumplen que $B = \cup_{i=1}^{n} B_i$ y $\delta(B_i) \le \delta(A_i) < \varepsilon$.

(2) $\Rightarrow$) Combinemos que $\bar{A} = \overline{A_i \cup \cdots \cup A_n} = \bar{A}_i \cup \cdots \cup \bar{A}_n$, con $\delta(A_i) = \delta(\bar{A}_i)$.

(2) $\Leftarrow$) Pues $A \subset \bar{A}$, y (1).

(3) Dado ε, tenemos $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$, $B = \cup_{j=1}^{m} B_j$, donde los diámetros de A_i, B_j son menores que ε, con lo cual

$$A \cup B = (\cup_{i=1}^{n} A_i) \cup (\cup_{j=1}^{m} B_j).$$

(4) Sea $\varepsilon = 1$, y escribamos $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$, con $\delta(A_i) < 1$ para todo i. Tomamos (elegimos) un punto $x_i \in A_i$, y sean $r_i = d(x_1, x_i)$. Ahora, sea $r = \text{máx}\{r_i \; 1 \le i \le n\}$, y tenemos $A \subset B(x_i, r+1)$, pues si $y \in A$, $y \in A_j$ para algún j, y entonces

$$d(x_1, y) \le d(x_1, x_j) + d(x_j, y) < r + 1$$

pues $\delta(A_j) < 1$. $\square$

Remarquemos que sólo la unión finita de conjuntos tt.a. es tt.a. Además, en el último demostramos que si A es tt.a. entonces A es acotado, pero la recíproca no es cierta.

Ejercicio 8.2.12. En $\mathbb{R}^n$ es lo mismo ser acotado que tt.a., demuéstrelo. Ayuda: comience con el cubo unitario, $Q = [0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]$ y observe que si divide cada intervalo en K partes iguales de longitud $1/K$ tendrá K^n cubos, cada uno de diámetro

$$\left(\sum_{j=1}^{K} \frac{1}{K^2} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{n}}{K}.$$

Luego, si puede tapar un cubo con finitos conjuntos de diámetro arbitrariamente chico, ya casi está, porque si un conjunto está acotado, está contenido en una bola, que a su vez está contenida en un cubo.

Teorema 8.2.13. *A es tt.a. si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existen $x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$ tal que*
$$A = \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Demostración. $\Rightarrow$) Sabemos que podemos escribir $A = A_1 \cup \cdots A_n$ con conjuntos de diámetro menor a ε.

Sea $x_i \in A_i$, tenemos $A_i \subset B(x_i, \varepsilon)$, pues $d(x, x_i) \leq \delta(A_i) < \varepsilon$. Luego, $A \subset \cup A_i \cup B(x_i, \varepsilon)$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $A \subset \cup_{1\leq i\leq n} B(x_i, \varepsilon/3)$. Sea $A_i = A \cap B(x_1, \varepsilon/3)$, y
$$A_k = \Big(A \setminus (\cup_{1\leq j<k} A_j)\Big) \cap B(x_k, \varepsilon/3).$$

Tenemos $A \subset \cup A_j$, y
$$\delta(A_i) \leq \delta(B(x_i, \varepsilon/3)) = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon,$$

con lo cual A es tt.a. □

Ejemplo 8.2.14. Veamos que la bola cerrada unitaria en $C([0,1])$ con $d(u, v) = \max_{x\in[0,1]} |u(x) - v(s)|$ no es totalmente acotada. Sea u_n lineal a trozos, que valga 0 en $0 \leq x \leq (n+1)^{-1}$, que crezca linealmente hasta valer 1 en n^{-1}, que decrezca linealmente y luego valga 0 desde $(n-1)^{-1}$ en adelante. Tenemos $d(u_n, u_m) = 1$ si $n \neq m$.

Escribamos $K(0, 1)$ como una unión de conjuntos de diámetro menor a $1/2$. Esta unión no puede ser finita, ya que cada conjunto debe contener como máximo a una de estas funciones.

Capítulo 9

Compacidad

9.1. Compactos

Recordemos las definiciones de cubrimientos y subcubrimientos que ya vimos en la parte de separabilidad:

Definición 9.1.1. Sea $A \subset E$. Una colección $\mathscr{C}$ de subconjuntos de E se llama un cubrimiento de A si $A \subset \cup\mathscr{C}$.

Si los conjuntos de $\mathscr{C}$ son abiertos, decimos que es un cubrimiento abierto del conjunto A.

Una colección de conjuntos en $\mathscr{C}$ cuya unión contenga a E se llama un subcubrimiento.

Definición 9.1.2. Un espacio (E,d) se dice compacto si todo cubrimiento abierto de E contiene un subcubrimiento finito (esto es, con finitos conjuntos).

Definición 9.1.3. Un conjunto $A \subset E$ se dice compacto si todo cubrimiento con abiertos de A contiene un subcubrimiento finito.

Teorema 9.1.4. *El conjunto $A \subset E$ es compacto si y sólo si el subespacio (A,d_A) es compacto.*

Demostración. $\Rightarrow$) Como A es compacto, todo subcubrimiento por abiertos de E tiene un subcubrimiento finito. Sea $A = \cup_{i\in I} H_i$, con H_i abiertos de (A,d_A). Luego, existen abiertos G_i de E tal que $G_i \cap A = H_i$, y por la compacidad, existe un conjunto finito $J \subset I$ tal que $A \subset \cup_{i\in J} \cap G_i$. Luego, $A = \cup_{i\in J} G_i \cap A = \cup_{i\in J} A_i$, existe un subcubrimiento finito.

$\Leftarrow$) Sea $A \subset \cup_{i\in I} G_i$, con G_i abierto en E. Luego, existe un cubrimiento por abiertos de A, con $H_i = G_i \cap A$. Como el subespacio es compacto, existe un subcubrimiento finito y $A \subset \cup_{i\in J} H_i$, pero entonces

$$A \subset \cup_{i\in J} H_i \subset \cup_{i\in J} G_i \cap A \subset \cup_{i\in J} G_i,$$

y por lo tanto existe un subcubrimiento finito. □

Definición 9.1.5. Decimos que una familia de conjuntos $\mathscr{C} = \{C_i : i \in I\}$ tiene la propiedad de intersección finita (p.i.f.) si para cualquier conjunto finito $J \subset I$ se tiene $\cap_{i\in J} C_i \neq \emptyset$.

Teorema 9.1.6. *Son equivalentes:*

(1) Toda sucesión tiene una subsucesión convergente.

(2) E es completo y totalmente acotado.

(3) E es compacto.

(4) Toda familia de conjuntos cerrados con la p.i.f. tiene intersección no vacía.

Demostración. Veamos las distintas implicaciones:

$(1) \Rightarrow (2)$: Si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en E, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ convergente a $x \in E$. Luego, por ser de Cauchy, toda la sucesión converge a x, y E es completo.

Para ver que es totalmente acotado, supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que no podemos cubrir E con finitos conjuntos de diámetro menor a 2ε. Tomamos x_1, y la bola $B(x_1, \varepsilon)$. Como no cubre E, tomamos $x_2 \notin B(x_1, \varepsilon)$, y la bola $B(x_2, \varepsilon)$. En general, elegidos $x_1, \ldots, x_{k-1}$, existe $x_k \notin \cup_{j=1}^{k-1} B(x_j, \varepsilon)$. Esta sucesión $\{x_k\}_{k\varepsilon 1}$ no converge, ya que no es de Cauchy (dos elementos cualesquiera están al menos a distancia ε uno del otro).

$(2) \Rightarrow (3)$: Esta es la construcción más complicada. Supongamos que E no es compacto, es decir, que existe un cubrimiento por abiertos $\{G_i\}_{i\in I}$ del cual no podemos extraer un subcubrimiento finito.

Tomemos $\varepsilon = 1$, y las bolas $B(x, 1)$ con $x \in E$ son un cubrimiento de E. Como E es tt.a., existe un subcubrimiento finito, $\{B(x_j, 1)\}_{1\leq j\leq n_1}$. Afirmamos que al menos una de estas bolas -digamos $B(x_1, 1)$- no puede cubrirse con finitos abiertos en $\{G_i\}_{i\in I}$ (si todas se cubren con finitos abiertos, tenemos el subcubrimiento finito de E).

Tomemos $\varepsilon = 1/2$, y las bolas $B(x, 1/2)$ con $x \in B(x_1, 1)$ son un cubrimiento por abiertos de $B(x_1, 1)$. Como E es tt.a., todo subconjunto también, y existe un subcubrimiento finito, y al menos una de estas bolas -digamos $B(x_2, 1/2)$- no puede cubrirse con finitos abiertos en $\{G_i\}_{i\in I}$ (si todas se cubren con finitos abiertos, tenemos el subcubrimiento finito de E).

Definimos entonces una sucesión de bolas encajadas $B(x_k, 1/k)$ tal que no pueden cubrirse con finitos abiertos de $\{G_i\}_{i\in I}$, pero esto es absurdo, ya que la completitud implica que existe

$$x \in \cap_{k\geq 1} \overline{B(x_k, 1/k)},$$

y dado un abierto G tal que $x \in G$, se tiene $B(x_k, 1/k) \subset G$ para todo k suficientemente grande (por el Teorema de encaje de Cantor).

$(3) \Rightarrow (4)$: Sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos cerrados con la p.i.f. Veamos que $\cap_{i\in I} F_i = \not\emptyset$.

Supongamos que la intersección es vacía, $\cap_{i\in I} F_i = \emptyset$.

- Tomo complementos, $E = \cup_{i\in I} F_i^c$.
- Por la compacidad de E, existe $J \subset I$ finito tal que $E = \cup_{i\in J} F_i^c$.
- Tomo complementos otra vez y $\cap_{i\in J} F_i = \emptyset$.

Absurdo, porque la familia tenía la p.i.f.

$(4) \Rightarrow (1)$: Sea $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset E$, y definamos las colas de la sucesión,

$$R_m = \{y \in E \ : \ y = x_n \text{ para algun } n \geq m\}.$$

Claramente, $R_1 \supset R_2 \supset \cdots$, y esta familia de conjuntos tiene la p.i.f. En particular, también la tienen las clausuras de los conjuntos $\mathbb{R}_m$. Entonces, existe $x \in E$ tal que

$$x \in \cap_{m\geq 1} \bar{R}_m.$$

Ahora, para todo $\varepsilon > 0$, y todo m, existe $n > m$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ pues x es de adherencia para los R_m.

Elijo $\varepsilon = 1$ y $m = 1$. Entonces, existe $n_1 > 1$ tal que $d(x_{n_1}, x) < 1$.

En general, para $\varepsilon = 1/k$, y $m = n_{k-1}$, existe $n_k > n_{k-1}$ tal que $d(x_{n_k}, x) < 1/k$, y tenemos entonces una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ que converge a x. □

Observación 9.1.7. Sea $A \subset E$. Entonces, A es compacto si y solo si A es completo y totalmente acotado.

Verifique que $A \subset E$ es compacto si y solo si toda sucesión en A tiene una subsucesión convergente a un $x \in A$.

Verifique que $A \subset E$ es compacto si y solo si toda familia de cerrados $\{F_i\}_{i\in I}$ tal que $\{F_i \cap A\}_{i\in I}$ tiene la p.i.f. satisface que $(\cap_i F_i) \cap A \neq \emptyset$.

Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 9.1.8. *Sea $A \subset E$ compacto. Entonces A es cerrado.*

Demostración. La estrategia será demostrar que el complemento es abierto.

Sea $x \in A^c$, y para cada $a \in A$, sea $r_a = d(a, x)$. Como A es compacto, tenemos

$$A \subset \cup_{a\in A} B(a, r_a/2),$$

y existe un subcubrimiento finito $\{B(a_i, r_{a_i}/2\}_{1\leq i\leq n}$.

Tomemos $r = \min\{r_{a_i}/2 \colon 1 \le i \le n\}$, y veamos que $B(x,r) \cap A = \emptyset$.

Si no lo fuese, existiría $y \in A \cap B(x,r)$, pero como $y \in B(a_i, r_{a_i}/2)$ para algún i, tendríamos

$$r_{a_i} = d(a_i,x) \le d(a_i,y) + d(y,x) < \frac{r_{a_i}}{2} + r < r_{a_i},$$

lo cual es absurdo. □

Teorema 9.1.9. *Sea (E,d) compacto. Entonces es separable.*

Demostración. La demostración es similar a la que hicimos antes, cuando vimos que la existencia de subcubrimientos numerables implicaba la separabilidad.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, cubrimos E con $\{B(x,1/n) : x \in E\}$, y extraemos un subcubrimiento finito, de centros x_{i_n} con $1 \le i_n \le j(n)$. Ahora, la unión de todos los centros es el denso numerable. □

9.2. Funciones continuas en compactos

Teorema 9.2.1. *Sean (E,d), (E',d') e.m. y sea $f : E \to E'$ continua. Si E es compacto, entonces $f(E)$ es compacto en E'.*

Demostración. Sea $\{V_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de $f(E)$, es decir

$$f(E) \subset \cup_{i \in I} V_i.$$

Como $E \subset f^{-1}(f(E)) \subset \cup_{i \in I} f^{-1}(V_i)$, y como los V_i son abiertos, $f^{-1}(V_i)$ también, y por lo tanto tenemos un cubrimiento abierto de E. Pero E es compacto, con lo cual podemos extraer un subcubrimiento finito, existe $J \subset I$ finito tal que $E \subset \cup_{i \in J} f^{-1}(V_i)$.

Entonces, $f(E) \subset \cup_{i \in J} f(f^{-1}(V_i)) \subset \cup_{i \in J} V_i$, y $f(E)$ es compacto. □

Teorema 9.2.2 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Sea E un espacio compacto, $f : E \to \mathbb{R}$ continua. Entonces,*

- *Existe $c > 0$ tal que para todo $x \in E$, se tiene $|f(x)| \le c$.*
- *Existen x_i, $x_s \in E$ tal que*

$$f(x_i) = \inf_{x \in E} f(x), \quad f(x_s) = \sup_{x \in E} f(x).$$

Demostración. Como f es continua y $f(E) \subset \mathbb{R}$, es un compacto, es decir, $f(E)$ es cerrado y acotado. Además, si $M = \sup f(E)$, y $m = \inf f(E)$, ambos pertenecen a $\overline{f(E)}$ pues hay sucesiones que tienden a ellos, y como $f(E)$ es cerrado, pertenecen a la imagen de f. □

Teorema 9.2.3. *Sean (E,d), (E',d') e.m., y sea $f: E \to E'$. Si f es continua y E es compacto, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Veamos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si x, $y \in E$ satisfacen $d(x,y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Supongamos que no es cierto, con lo cual existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existen x e y tal que $d(x,y) < \delta$ pero $d'(f(x), f(y)) > \varepsilon$.

Tomamos $\delta = 1/n$, y llamamos x_n, y_n a un par de puntos con esta propiedad. Pero como E es compacto, la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión x_{n_k} que converge a $x \in E$. Además,

$$d(y_{n_k},x) \leq d(y_{n_k},x_{n_k}) + d(x_{n_k},x) < d(x_{n_k},x) + \frac{1}{n_k},$$

con lo cual $y_{n_k} \to x$ también.

Como f es continua, $f(x_{n_k}) \to f(x)$, y $f(y_{n_k}) \to f(x)$, con lo cual

$$d'(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \to 0,$$

pero esa distancia era mayor a ε. □

Otra, demostración de Heine que motivó la definición de compactos vía subcubrimientos finitos, generalizada por Borel.

Dado $\varepsilon > 0$, para cada $x \in E$ existe $\delta(x) > 0$ tal que si $y \in B(x, \delta(x))$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Por otra parte, como $E \subset \cup_{x\in E} B(x, \delta(x)/2)$, existe un subcubrimiento finito de n bolas centradas en los puntos $x_1, \ldots, x_n$ y radios $\delta(x_i)/2$.

Sea $\delta = \text{mín}_1\{\delta(x_i)/2\}$. Si x, $y \in E$, con $d(x,y) < \delta$, existe i tal que $d(x,x_i) < \delta(x_i)/2$, y tenemos

$$d(y,x_i) \leq d(y,x) + d(x,x_i) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta(x_i)}{2} \leq \delta(x_i).$$

Entonces, x, $y \in B(x_i, \delta(x_i))$ con lo cual $d'(f(x), f(x_i)) < \varepsilon$, $d'(f(y), f(x_i)) < \varepsilon$.

Tenemos entonces que $d'(f(x), f(y)) < 2\varepsilon$. □

Observación 9.2.4. La demostración anterior utiliza, sin decirlo, el concepto de número de Lebesgue.

Definición 9.2.5. Dado E y un cubrimiento $\{G_i\}_{i\in I}$ de E, decimos que el cubrimiento tiene un número de Lebesgue para F si existe $\delta > 0$ tal que para todo conjunto $A \subset F$ de diámetro $\delta(A) < \delta$, existe $i \in I$ tal que $A \subset G_i$.

Teorema 9.2.6. *Sea E compacto, y un cubrimiento $\{G_i\}_{i\in I}$ de E. Entonces $\{G_i\}_{i\in I}$ tiene un número de Lebesgue.*

Demostración. Para cada $x \in E$, como $\{G_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento por abiertos, existe i_x y $r_x > 0$ tal que $x \in B(x,r_x) \subset G_{i_x}$.

Como E es compacto y $E \subset \cup_x B(x,r_x/2)$, existe un subcubrimiento finito de estas bolas, $E \subset \cup_{|\leq j\leq n} B(x_j, r_{x_j}/2)$.

Sea $\delta = \min\{r_{x_j}/2\colon\ 1 \leq j \leq n\}$. Si $A \subset E$, con $\delta(A) < \delta$), dado $x \in A$, existe x_k tal que $d(x,x_k) < r_{x_k}/2$. Entonces, para cualquier $a \in A$ tenemos

$$d(a,x_k) \leq d(a,x) + d(x,x_k) < \delta + \frac{r_{x_k}}{2} < r_{x_k},$$

con lo cual $A \subset B(x_k, r_{x_k}) \subset G_{i_{x_k}}$. □

9.2.1. Compacidad y espacios de funciones

Uno de los problemas que resolveremos más adelante es el de encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto en el espacio de las funciones continuas (con la distancia del supremo) sea compacto. Dos definiciones que necesitaremos son las siguientes:

Definición 9.2.7. Sea (E,d) un e.m. Una familia de funciones $\{x_i\}_{i\in I} \subset C(E,\mathbb{R})$ se dice equiacotada si existe $M > 0$ tal que para todo $i \in I$ se tiene

$$\max_{t\in E} |x_i(t)| \leq M.$$

Definición 9.2.8. Sea (E,d) un e.m. Una familia de funciones $\{x_i\}_{i\in I} \subset C(E,\mathbb{R})$ se dice equicontinua en $t \in E$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $i \in I$ se tiene

$$|x_i(t) - x_i(s)| < \varepsilon \text{ cuando } d(s,t) < \delta.$$

Más adelante volveremos a este problema cuando veamos el teorema de Arzela-Ascoli. El siguiente resultado está estrechamente relacionado:

Teorema 9.2.9. *Sea $A \subset C([a,b],\mathbb{R})$ tt.a. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|s-t| < \delta$, entonces $|x(t) - x(s)| < \varepsilon$ para toda $x \in A$.*

Demostración. Usando que A es $tt.a.$, podemos escribirlo como $A = A_i \cup \cdots A_n$, y $\delta(A_i) < \varepsilon/2$.

Tomemos $x_i \in A_i$, con lo cual es uniformemente continua, y existe δ_1 tal que si $|t-s| < \delta_i$, entonces $|x_i(t) - x_i(s)| < \varepsilon/3$.

Sea $\delta = \min\{\delta_i\colon\ 1 \leq i \leq n\}$. Luego, si $|t-s| < \delta$, entonces $|x_i(t) - x_i(s)| < \varepsilon/3$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Ahora, sea $x \in A_j \subset A$, y acotamos

$$\begin{aligned} |x(t) - x(s)| &\leq |x(t) - x_j(t)| + |x_j(t) - x_j(s)| + |x_j(s) - x(s)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

La demostración queda terminada. □

Capítulo 10

Conexión

Nos queda pendiente la demostración de uno de los teoremas básicos sobre funciones continuas, el Teorema de Bolzano.

Este teorema nos decía que si una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ era menor a cero en uno de los extremos del intervalo, y mayor en el otro, entonces tenía al menos un cero.

Su demostración incluye un concepto nuevo: el intervalo $[a,b]$ es conexo, no podemos separarlo en dos abiertos disjuntos. Observemos que si fuera posible escribir a un conjunto como unión disjunta de dos abiertos, siempre podemos definir una función continua que vale 1 en uno de los abiertos, y -1 en el otro, pero que no tiene ceros.

10.1. Conexos

Definición 10.1.1. Un espacio métrico (E,d) es conexo cuando los únicos subconjuntos de E que son a la vez abiertos y cerrados son el espacio mismo y el conjunto vacío.

Si existiese un conjunto que sea a la vez abierto y cerrado, también el complemento lo es, con lo cual E es la unión disjunta de U y U^c.

Definición 10.1.2. Un par de conjuntos abiertos U y V desconecta a E si $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $E = U \cup V$, $U \cap V \cap E = \emptyset$.

Definición 10.1.3. Un conjunto $A \subset E$ es conexo si el subespacio A es conexo.

Tenemos entonces que si existe un par de conjuntos que desconecta a E, el espacio no es conexo.

Definición 10.1.4. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se llama un intervalo si para todo a, $b \in A$, si $a < x < b$, entonces $x \in A$.

Teorema 10.1.5. *Un intervalo $A \subset \mathbb{R}$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que A es un intervalo pero no es conexo, y que un par U, V desconecta a A. Sean $a \in U$, $b \in V$, y supongamos $a < b$. Sea

$$x = \sup\{t \ : \ a \leq t \leq b, \ t \in U\},$$

y $x \in A$ por ser un intervalo. Ahora, si $x \in U$, al ser abierto tenemos $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U$ para algún ε, lo cual contradice que sea el supremo. Entonces, $x \in V$, y por ser abierto tenemos nuevamente $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset V$ para algún ε, lo cual también contradice que sea el supremo. □

Teorema 10.1.6. *Un conjunto conexo $A \subset \mathbb{R}$ es un intervalo.*

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}$ conexo, pero que no es un intervalo. Entonces, por la definición de intervalo, existen a, $b \in A$, y $x \in A^c$ tales que $a < c < b$. Sean

$$U = A \cap (-\infty, c), \quad V = A \cap (c, \infty).$$

Claramente, son abiertos de (A, d_A), disjuntos, y $A = U \cup V$, con lo cual A no es conexo, absurdo. □

Teorema 10.1.7. *Sean (E,d) y (E',d') e.m. Sea $f : E \to E'$ continua. Si $A \subset E$ es conexo, entonces $f(A)$ es conexo en E'.*

Demostración. Supongamos que U, V desconectan a $f(A)$. Tenemos $f(A) \subset U \cup V$, con $f(A) \cap U \neq \emptyset$, $f(A) \cap V \neq \emptyset$, $U \cap V \cap f(A) = \emptyset$.

Ahora, $A \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, $A \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$, $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, y $A \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$, lo cual desconectaría al conjunto A. □

Teorema 10.1.8 (Teorema del valor medio, Bolzano)**.** *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ continua, E conexo, tal que existen a, $b \in E$ con $f(a) < 0$, y $f(b) > 0$. Entonces existe $c \in E$ tal que $f(c) = 0$.*

Demostración. Como $Im(f) \subset \mathbb{R}$ es un conexo, es un intervalo, y contiene todos los puntos x que satisfacen $f(a) < x < f(b)$. En particular, contiene al cero. □

Observación 10.1.9. Para que un espacio sea disconexo, debe tener al menos 2 puntos. En particular, si tiene un único punto es conexo.

Ejercicio 10.1.10. Hallar todos los subconjuntos conexos de $\mathbb{Q}$.

Teorema 10.1.11. *Si A es conexo, y $A \subset B \subset \bar{A}$, entonces B es conexo.*

Demostración. Supongamos que B es disconexo, con lo cual existen abiertos U y V tal que $B \subset U \cup V$, $B \cap U \neq \emptyset$, $B \cap V \neq \emptyset$ y $U \cap V = \emptyset$.

Como todo punto de B pertenece a $\bar{A}$, dado $b \in B$ con $b \in U$, tenemos que $U \cap A \neq \emptyset$ (pues U es abierto, tomo una bola centrada en b y uso que $b \in \bar{A}$). De la misma manera, $A \cap V \neq \emptyset$.

Entonces, $A \subset U \cup V$, con $A \cap U$ y $A \cap V$ no vacíos, con lo cual desconectan a A, absurdo pues A era conexo. □

Teorema 10.1.12. *Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos conexos con intersección no vacía, entonces $A = \cup A_i$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que A no es conexo, y U, V un par de abiertos que lo desconectan. Entonces, $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$, y $A \cap U \cap V = \emptyset$.

Como por hipótesis existe x en la intersección de los A_i, supongamos que $x \in U$.

Ahora, como $V \cap A \neq \emptyset$, existe j tal que $V \cap A_j \neq \emptyset$. Luego, como $x \in A_j \cap U$, tenemos que

$$A_j \subset U \cup V, \quad A_j \cap U \neq \emptyset, \quad A_j \cap V \neq \emptyset,$$

pero esto contradice que $A \cap U \cap V = \emptyset$, absurdo. □

Definición 10.1.13. Para cada $x \in E$ definimos la componente conexa asociada a x,

$$C(x) = \cup \{A \ : \ x \in A, \, A \text{ conexo.}\}$$

Observación 10.1.14. Sea $z \in C(x) \cap C(y)$, con lo cual son dos conexos con intersección no vacía. Entonces, $C(x) \cup C(y)$ es conexo. Como consecuencia de esto,

$$x \in C(x) \subset C(x) \cup C(y) \subset C(x)$$

donde la última inclusión vale pues $C(x) \cup C(y)$ es un conexo que contiene a x.

Teorema 10.1.15. *Para todo $x \in E$, $C(x)$ es cerrado.*

Demostración. Tenemos que $C(x)$ es conexo, y $\overline{C(x)}$ también lo es, con lo cual $\overline{C(x)} \subset C(x)$. □

Definición 10.1.16. Si $A \subset E$, las componentes conexas del subespacio A se llaman las componentes conexas de A.

Definición 10.1.17. Un espacio se dice totalmente disconexo si para todo $x \in E$, $C(x) = \{x\}$.

Ejemplo 10.1.18. Los racionales son totalmente disconexos.

Definición 10.1.19. Un espacio se dice localmente conexo si para todo $x \in E$, dado un entorno V_x, existe $B \subset V_x$ con $x \in B$, y B conexo.

Teorema 10.1.20. *Un espacio E es localmente conexo si y sólo si las componentes conexas de cualquier conjunto abierto son abiertas.*

Demostración. Sea E localmente conexo, $A \subset E$ abierto, y sea B una componente conexa de A. Sea $x \in B$, entonces

$$x \in V \subset A$$

con V entorno conexo, y por lo tanto, $V \subset B$ (pues B era una componente conexa), con lo cual B es abierta. □

Teorema 10.1.21. *Un espacio E arcoconexo es conexo.*

Demostración. Sea $x \in E$, para todo $y \in E$ existe $\gamma_y : [0,1] \to E$ continua con $\gamma_y(0) = x$, $\gamma_y(1) = 1$.

Como $[0,1]$ es conexo, los conjuntos $\gamma_y([0,1])$ son conexos, y tienen intersección no vacía ($x = \gamma_y(0)$ para todo y). Luego, su unión es conexa, y tenemos

$$E = \cup_{y\in E}\{y\} = \cup_{y\in E}\gamma_y(1) \subset \cup_{y\in E}\gamma_y([0,1]).$$

La demostración está terminada. □

Capítulo 11

Baire

11.1. Introducción

En 1899 Rene Baire publicó su trabajo sobre convergencia de funciones que (de)generó (en) el hoy llamado Teorema de Baire. Se proponía resolver dos problemas, fáciles de describir:

- Sea $f(x,y)$ una función continua como función de cada variable por separado. ¿Qué tan malo puede ser el conjunto de puntos de discontinuidad de f? Consideremos por ejemplo

  $$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2},$$

  un clásico de análisis 1, que es continua como función de x o de y, pero es discontinua en el origen. ¿Habrá ejemplos más complicados, funciones que sean discontinuas en conjuntos más grandes?

- Si una sucesión $\{f_n\}_n$ de funciones continuas converge puntualmente a una función f, ¿qué tan grande puede ser el conjunto de discontinuidades de f?

  Un ejemplo clásico aquí es la sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$, que converge puntualmente en el intervalo $[0,1]$ a una función discontinua en $x = 1$. El problema de fondo aquí es, una vez más, la convergencia de las series de Fourier: dado que las funciones $sen(nx)$, $cos(nx)$ son continuas, y las sumas parciales de la serie también lo son, ¿cómo serán las discontinuidades de una función definida por una serie de Fourier que converge puntualmente?

El trabajo original de Baire, Sur les fonctions de variables reelles, está disponible en internet, ver [1].

11.2. Resultados

Sea (E,d) un e.m. completo y $\{F_n\}_{n\geq 1}$ con $F_n = \bar{F}_n \subset E$. Nuestro objetivo es probar que si cada conjunto tiene interior vacío, la unión también tiene interior vacío.

Este es el teorema de Baire, y cuando podamos escribir un espacio como unión numerable de cerrados, como consecuencia del teorema, alguno de estos cerrados debe tener interior no vacío.

Lema 11.2.1. *Sea F un conjunto cerrado con interior vacío. Entonces, cada bola cerrada contiene otra bola cerrada cuya intersección con F es vacía.*

Demostración. Antes de la demostración, observemos que si existe tal bola, podemos encontrar otras de radios arbitrariamente chicos.

Para demostrarlo, sea F un cerrado con interior vacío, y $K(x,r)$ una bola cerrada arbitraria. Sea $y \in K(x,r) \cap F^c$, tal punto existe o de lo contrario, $B(x,r) \subset F$ y x sería un punto interior.

Como el complemento de F es abierto, existe un $\rho > 0$ tal que $B(y,\rho) \subset F^c$, y tomando ρ suficientemente pequeño, $B(y,\rho) \subset K(x,r)$.

Podemos tomar entonces la bola cerrada $K(y,\rho/2) \subset B(y,\rho) \subset F^c$, y el Lema queda demostrado. □

Teorema 11.2.2 (Teorema de Baire). *En un espacio métrico completo la unión de una sucesión de conjuntos cerrados con interior vacío tiene interior vacío.*

Demostración. Sea $\{F_n\}_{n\geq 1}$ con $F_n = \bar{F}_n \subset E$, $F^o = \emptyset$.

Sea $B(x,r)$ una bola arbitraria, y veremos que hay un punto de ella que no está en ninguno de los F_n. El resto de la demostración consiste en aplicar infinitas veces el lema previo, y redondearla usando encaje de conjuntos cerrados con diámetro tendiendo a cero:

- Sea $K_1(y_1,r_1) \subset B(x,r)$ tal que $K_1(y_1,r_1) \cap F_1 = \emptyset$, y $r_1 < 1$.
- Sea $K_2(y_2,r_2) \subset K_1(y_1,r_1)$ tal que $K_2(y_2,r_2) \cap F_2 = \emptyset$, y $r_1 < 1/2$.
- En general, dada $K_{n-1}(y_{n-1},r_{n-1})$, por el Lema anterior sabemos que existe $K_n(y_n,r_n) \subset K_{n-1}(y_{n-1},r_{n-1})$ tal que $K_n(y_n,r_n) \cap F_n = \emptyset$, y $r_1 < 1/n$.

Como E es completo, sabemos que existe $y \in \cap_{n\geq 1} K_n$, y por la construcción de la bola K_n, $y \notin F_n$ para cada $n \geq 1$, con lo cual y no pertenece a la unión de los F_n, y la bola $B(x,r)$ no puede estar contenida en la unión. □

Definición 11.2.3. Un conjunto $A \subset E$ se dice nunca denso si para todo abierto G, existe una bola abierta $B \subset G$ tal que $A \cap B = \emptyset$.

Teorema 11.2.4. *Un conjunto A es nunca denso si y sólo si* $(\bar{A})^\circ = \emptyset$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que existe $x \in (\bar{A})^\circ$, con lo cual existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset \bar{A}$.

Sea una bola cualquiera $B(y, r) \subset B(x, r_x)$, tenemos $B(y, r) \subset \bar{A}$, y por lo tanto $y \in \bar{A}$, con lo cual existe al menos un elemento de A en $B(y, r)$.

Luego, encontramos un abierto $G = B(x, r_x)$ tal que toda bola contenida en G, intersecada con A es un conjunto no vacío, contradiciendo que A es nunca denso.

$\Leftarrow$) si $(\bar{A})^\circ = \emptyset$, para todo $x \in \bar{A}$ y todo $r > 0$ tenemos

$$B(x, r) \not\subset \bar{A}.$$

Luego, $B(x, r) \cap \bar{A}^c \neq \emptyset$.

Pero como $\bar{A}$ es cerrado, su complemento es abierto, $B(x, r)$ también lo es, y la intersección es abierta, con lo cual existe $y \in B(x, r)$, y $s > 0$ tal que

$$B(y, s) \subset B(x, r) \cap \bar{A}^c,$$

en otras palabras, $B(y, s) \cap A = \emptyset$, y por lo tanto A es nunca denso. □

Podemos reformular el Teorema de Baire:

Teorema 11.2.5 (Teorema de Baire:)**.** *En un espacio métrico completo la unión de una sucesión de conjuntos nunca densos tiene interior vacío.*

No hay mucho que demostrar, ya que esta versión se reduce a la anterior: si bien los conjuntos no necesitan ser cerrados, como

$$\cup_{n \geq 1} A_n \subset \cup_{n \geq 1} \bar{A}_n,$$

y el interior de estos últimos es vacío por ser nunca densos, la versión anterior nos asegura que el interior de la unión es vacío, y con más razón, la unión de los A_n tendrá interior vacío.

Conviene introducir la siguiente definición:

Definición 11.2.6. Un subconjunto A de un e.m. completo E se dice magro (o de primera categoría) si es una unión numerable de conjuntos nunca densos.

Algunos corolarios interesantes, que se aplicarán más de una vez, son los siguientes:

Teorema 11.2.7. *Si* (E, d) *es un espacio métrico completo sin puntos aislados, entonces E no es numerable.*

Demostración. Si fuera numerable tendríamos $E = \{x_n\}_{n\geq 1}$.

Como $\{x_n\}$ es nunca denso, por Baire, $E^\circ = \emptyset$, pero entonces $E = E\circ = \emptyset$, absurdo. □

Teorema 11.2.8. *Si (E,d) es un espacio métrico completo, y $E = \cup_{n\geq 1} F_n$ donde los conjuntos F_n son cerrados, entonces al menos uno de los conjuntos F_n tiene interior no vacío.*

Demostración. La demostración es directa, si cada F_n tiene interior vacío, por Baire, $E^\circ = \emptyset$, pero entonces $E = E\circ = \emptyset$, absurdo. □

Teorema 11.2.9. *Si (E,d) es un espacio métrico completo, toda intersección numerable de conjuntos que son abiertos y densos, es densa en E.*

Demostración. Aquí, tomemos $\{U_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de abiertos densos, y sea $U = \cap_{n\geq 1} U_n$. Tomemos $x \in E$, y veamos que para cualquier $r > 0$, se tiene $B(x,r) \cap U \neq \emptyset$.

Como U_1 es denso, existe $x_1 \in B(x,r) \cap U_1$, y como es denso, existe $r_1 < 1$ tal que $B(x_1, r_1/2) \subset B(x,r)$.

En general, definida $B(x_{n-1}, r_{n-1}/2)$ con $r_{n-1} < 1/(n-1)$, por ser U_n denso y abierto, existen x_n, $0 < r_n < 1/n$ tal que $B(x_n, r_n/2) \subset U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}/2)$.

Obtuvimos una sucesión de bolas encajadas, con diámetro tendiente a cero, y por la completitud vale el Teorema de Encaje de Cantor, existe un $x \in \cap_{n\geq 1} \overline{B(x_n, r_n/2)}$. Por cómo elegimos los radios, $x \in U_n$ para todo $n \geq 1$, con lo cual U es denso. □

Teorema 11.2.10. *Si (E,d) es un espacio métrico completo, y $E = \cup_{n\geq 1} F_n$, entonces $G = \cup_{n\geq 1} F_n^\circ$ es un abierto denso en E.*

Demostración. Ejercicio que sale fácil. □

Teorema 11.2.11. *Sean (E,d) es un espacio métrico completo, y $f_n : E \to E'$, continuas en E, que convergen puntualmente a $f : E \to E'$. Entonces el conjunto de discontinuidades de f es un conjunto de primera categoría.*

Demostración. Ejercicio que no sale fácil. □

Capítulo 12

Espacios normados

12.1. Espacios normados y de Banach

Definición 12.1.1. Sea E un $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ espacio vectorial. Una función $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ es una norma si verifica

(1) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(3) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Ejercicio 12.1.2. Demuestre que entonces $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$.

Definición 12.1.3. Un espacio vectorial E con una norma $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ se llama un espacio normado.

Definición 12.1.4. Un espacio normado completo se llama un espacio de Banach.

Ejercicio 12.1.5. No es difícil demostrar que $d(x,y) = \|x-y\|$ es una distancia. Hágalo!

Ejercicio 12.1.6. Probar que, en todo espacio normado E, con la distancia d inducida por la norma, se tiene:

(1) $d(x,y = d(x+z, y+z)$.

(2) $y + B(x,r) = B(x+y, r)$.

(3) Si M es un subespacio vectorial de E, entonces:

- $\bar{M}$ es un subespacio vectorial.
- Si $M^\circ \neq \emptyset$, entonces $M = E$.

Observación 12.1.7. Un ejemplo que ya vimos varias veces es el espacio $C(E,\mathbb{R})$ de funciones continuas sobre un espacio métrico (E,d), y la norma dada por el supremo del módulo de la función en E:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in E} |f(x)|.$$

A continuación lo estudiaremos con más profundidad y sacaremos una consecuencia no trivial de sus propiedades.

Ejemplo 12.1.8. Sea (E,d) un espacio métrico, y $B(E)$ el conjunto de funciones de $f : E \to \mathbb{R}$ acotadas. El espacio $B(E)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y definimos la norma

$$\|f\| = \sup_{x\in E} |f(x)|.$$

Sea $C(E)$ el conjunto de funciones en $B(E)$ acotadas y continuas sobre E. Es un subespacio vectorial de $B(E)$, y además es un espacio de Banach, pues si

$$\|f_n - f_m\| \to 0$$

cuando n, $m \to \infty$, entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|$$

para todo $x \in E$, con lo cual tenemos sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por ser completo, existe el límite puntual

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Podemos probar que la sucesión converge (con la norma) a este límite puntual f, pues si $n, m \geq n_0$, tenemos $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, y cuando $m \to \infty$ obtenemos $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in E$, con lo cual

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Para ver que el límite es continuo en un x fijo, alcanza con intercalar una f_n con $n \geq n_0$ y tenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

en la primera y la tercera porque $n \geq n_0$, y en la segunda, como f_n es continua en x, existe un $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta$ implica $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$.

Por último, f es acotada, ya que si $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}\sup_{x\in E}|f(x)| &\leq \sup_{x\in E}|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)| \\ &\leq \sup_{x\in E}|f(x)-f_n(x)|+\sup_{x\in E}|f_n(x)| \\ &\leq M+\varepsilon,\end{aligned}$$

donde M existe pues f_n es acotada.

Observación 12.1.9. Sea (E,d) un e.m. Cada elemento de $C(E)$ es una función continua y acotada, $f : E \to \mathbb{R}$. Cuando E no es contable, no tiene base contable.

Ejercicio 12.1.10. El espacio $C(E,\|.\|_\infty)$ es completo, y por lo tanto un espacio de Banach.

Definición 12.1.11. Sean (E,d) y (F,ρ) dos e.m. Una función $T : E \to F$ se dice una isometría si

$$\rho(Tx,Ty) = d(x,y)$$

para todo par de puntos x, $y \in E$.

Observación 12.1.12. Sea (E,d) un e.m. Veamos una construcción en la cual asignamos a cada punto de E una función continua y acotada, y utilizando la completitud, de $C(E,\|.\|_\infty)$ tendremos un espacio $\hat{E}$ completo que reemplace a E.

Sea $a \in E$ fijo. Para cada $u \in E$, construimos la función f_u, definida en un $x \in E$ como

$$f_u(x) = d(x,u) - d(x,a)$$

y por la desigualdad triangular, $|f_u(x)| \leq d(u,a)$, con lo cual cada función f_u es acotada. Además, es continua pues la distancia lo es.

Tenemos además que $\|f_u\| = d(u,a)$ pues $f_u(u) = f_u(a) = d(a,u)$. Más aún, con la distancia inducida por la norma,

$$\rho(f_u, f_v) = \|f_u - f_v\| = \sup_{x\in E}|f_u(x) - f_v(x)| = \sup|d(x,u) - d(x,v)| \leq d(u,v)$$

la cual se alcanza en $x = u$ y también en $x = v$, es decir, $\|f_u - f_v\| = d(u,v)$.

Conseguimos $T : E \to C(E)$, $T(u) = f_u$, que además cumple

$$\rho(T(u),T(v)) = d(u,v),$$

es una isometría.

Como $C(E)$ es un espacio completo, tiene sentido definirse $\hat{E} = \overline{T(E)}$, la clausura en $C(E)$ de $T(E)$. Existe alguna función que es el límite de una sucesión de Cauchy de puntos de E, que podemos pensarla como una sucesión de Cauchy de funciones en $C(E)$.

Definición 12.1.13. Sea (E,d) un e.m. Decimos que $(\hat{E},\rho)$ es una completación de E si existe $T: E \to \hat{E}$ tal que $\rho(Tx,Ty) = d(x,y)$, y además $\hat{E} = \overline{T(E)}$.

Observación 12.1.14. Dado un e.m. (E,d), su completación es $(\hat{E},T)$. Si $\hat{E}$ es acotado, entonces E era acotado.

12.2. Operadores continuos

Definición 12.2.1. Sean E, F dos espacios normados sobre el mismo cuerpo de escalares. Una aplicación $T: E \to F$ es lineal si

- $T(x+y) = T(x) + T(y)$,
- $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

Definición 12.2.2. Sean E, F dos espacios normados sobre el mismo cuerpo de escalares. Una aplicación $T: E \to F$ es continua en $x_0 \in E$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x_0 - x\|_E < \delta$, entonces $\|T(x_0) - T(x)\|_F < \varepsilon$.

Observación 12.2.3. Como T es lineal, tenemos $T(0) = 0$. Entonces T será continua en el origen si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - 0\|_E = \|x\|_E < \delta$, se tiene $\|T(x) - 0\|_F = \|T(x)\|_F < \varepsilon$.

Definición 12.2.4. Decimos que $T: E \to F$ es acotada si existe $c > 0$ tal que para todo $x \in E$

$$\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E.$$

Observación 12.2.5. La menor de las cotas c de una aplicación lineal T es en realidad una norma para el espacio $L(E,F)$ de aplicaciones lineales de E en F acotada. Cuando $E = F$ escribiremos $L(E)$.

En general, vamos a omitir el espacio en la norma de x y $T(x)$ siempre y cuando no se preste a confusión.

Teorema 12.2.6. *Sea T acotada. Entonces, T es uniformemente continua.*

Demostración. Por un lado, existe $c > 0$ tal que $\|Ty - Tx\| = \|T(y-x)\| \leq C\|y-x\|$ para todo $\varepsilon > 0$ y todo par x, y. Luego, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = \varepsilon/c$. □

Teorema 12.2.7. *Sea T continua en el origen. Entonces, T es acotada.*

Demostración. Si T es continua en el origen, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| \leq \delta$, entonces $\|T(x)\| \leq 1$.

Sea $x \neq 0$, y tomemos $\delta x / \|x\|$. Tenemos

$$\left\| T\left(\frac{\delta}{\|x\|} x\right) \right\| \leq 1,$$

y por linealidad,

$$\|T(x)\| \leq \frac{1}{\delta} \|x\|,$$

con lo cual T es acotado. □

Teorema 12.2.8. *Sea T continua en el origen. Entonces, T es continua.*

Demostración.

$$\|Ty - Tx\| = \|T(y - x)\| \leq C\|y - x\|.$$

□

Teorema 12.2.9. *La demostración anterior se puede twittear.*

Demostración. Tiene menos de 140 caracteres. □

Teorema 12.2.10. *Si T es continua en todo E, es continua en el origen.*

Demostración. Más que evidente. □

Observación 12.2.11. Hemos probado la equivalencia entre distintas versiones de continuidad y acotación de operadores lineales. Agrupándolas, tenemos:

Teorema 12.2.12. *Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:*

(1) T es continua en el origen.

(2) Existe una constante real c tal que $\|Tx\|_F \leq c\|x\|_E$.

(3) T es uniformemente continua.

(4) T es continua.

Observación 12.2.13. Sean E, F espacios normados, y $L(E,F) = \{T : E \to F$ lineales y continuas$\}$. Claramente, $L(E,F)$ es un espacio vectorial, con

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x),$$

$$(\lambda T)(x) = \lambda T(x).$$

Teorema 12.2.14. *Sea $a = \inf\{c \colon \|T(x)\| \leq c\|x\|\}$. Entonces:*

(1) $\|T(x)\| \leq a\|x\|$ *para todo* $x \in E$.

(2) $a = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$.

(3) $a(T)$ *es una norma en* $L(E,F)$*, la notaremos* $a(T) = \|T\|_{L(E,F)}$.

Demostración. (1) Como a es un ínfimo, existe $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tal que $\|T(x)\| \leq a_n\|x\|$ para todo n, y $a_n \to a$. Luego, para cada $x \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} \|T(x)\| \leq \lim_{n\to\infty} a_n\|x\| = a\|x\|.$$

(2) Sea $b = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$. Como $\|T(x)\| \leq a\|x\| \leq a$ si $\|x\| \leq 1$, tenemos $b \leq a$. Veamos la otra desigualdad.

Dado $x \in E$ no nulo, por la linealidad y la definición de b,

$$\|T(x)\| \leq \|T(x/\|x\|)\| \cdot \|x\| \leq b\|x\|,$$

con lo cual $a \leq b$.

(3) Claramente $a = 0$ si y solo si $\sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} = 0$, esto es, $T(x) = 0$ para todo x de norma menor o igual a 1. Pero entonces $T \equiv 0$, ya que $T(x) = \|T(x/\|x\|)\| \cdot \|x\|$ para $x \neq 0$.

Para la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}\sup_{\|x\|\leq 1} \{\|(T_1+T_2)(x)\|\} &= \sup_{\|x\|\leq 1} \{\|T_1(x)\| + \|T_2(x)\|\} \\ &\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \{\|T_1(x)\|\} + \sup_{\|x\|\leq 1} \{\|T_2(x)\|\}.\end{aligned}$$

Falta verificar que saca escalares con su módulo, ejercicio! □

Observación 12.2.15. Claramente, tenemos que $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$. Esto lo vamos a usar seguido más adelante, cuando el operador sea la diferencial de una función.

Observación 12.2.16. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es lineal, entonces es continua.

Sea $y = T(x)$, es decir $y_k = \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j$, y por Cauchy Schwartz,

$$|y_k| \leq \left(\sum_{j=1}^n a_{kj}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^n a_{kj}^2\right)^{1/2} \|x\|,$$

con lo cual

$$\|T(x)\|^2 = \|y\|^2 = \sum_{k=1}^m y_k^2 = \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_{kj}^2\right) \|x\|,$$

y tenemos probada la acotación de T.

12.3. Homeomorfismos

Definición 12.3.1. Sea $T : E \to F$ lineal, continua y biyectiva, con inversa $T^{-1} : F \to E$ contina. Decimos entonces que T es un homeomorfismo.

Observación 12.3.2. Sea $T : E \to F$ lineal y biyectiva. Existe entonces $T^{-1} : F \to E$. Supongamos que existen constantes m, M tales que

$$m\|x\| \leq \|T(x)\| \leq M\|x\|.$$

Entonces, tanto T como T^{-1} son continuas. Para T es por la acotación de la derecha, mientras que la de la izquierda implica la de T^{-1}, pues si $y = T(x)$, como $x = T^{-1}(y)$, tenemos

$$m\|T^{-1}(y)\| = m\|x\| \leq \|T(x)\| = \|T(T^{-1}(y))\| = \|y\|,$$

y por lo tanto,

$$\|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{m}\|y\|.$$

Definición 12.3.3. Decimos que $\|\cdot\|_1$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$ si *id* es un homeomorfismo, o sea, *id* es lineal y continua,

$$m_1\|x\|_1 \leq \|id(x)\|_2 = \|x\|_2 \leq m_2\|x\|_1.$$

Observación 12.3.4. Supongamos que F es completo, y T un homeomorfismo. Sea $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset E$ una sucesión de Cauchy. Entonces,

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq M\|x_n - x_m\|.$$

Como F es completo, $Tx_n \to y$ cuando $n \to \infty$. Entonces,

$$T^{-1}(T(x_n)) \to T^{-1}y,$$

con lo cual $x_n \to T^{-1}y$, y E es completo.

Observación 12.3.5. Sea $E = [0,1]$, $C(E) = \{x : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continuas}\}$. Tenemos definidas $x+y$, $\lambda \cdot x$, y definimos las normas

$$\|x\|_\infty = \sup_{0\leq t\leq 1} |x(t)|,$$

$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt.$$

Estas normas no son equivalentes, como podemos verlo con las funciones $x_n(t) = t^n$, ya que $\|x_n\|_1 = 1/(n+1)$, mientras que $\|x_n\|_\infty = 1$.

Observemos que de todos modos, $\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty$ para toda función $x \in C(E)$.

Observación 12.3.6. Sea E un e.n. de dimensión finita, y sea $\{e_1, \cdots, e_n\}$ una base de E. Sea $x = (\psi_1, \cdots, \psi_n) \in \mathbb{R}^n$. Definimos $T : \mathbb{R}^n \to E$, lineal y biyectiva,

$$T(x) = \psi_1 \cdot e_1 + \cdot + \psi_n \cdot e_n.$$

Sea $M = (\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2)^{1/2}$.

Veamos que T es un homeomorfismo:

$$\begin{aligned}\|T(x)\| =& \|\psi_1 \cdot e_1 + \cdot + \psi_n \cdot e_n\| \\ \leq& \sum_{i=1}^n |\psi| \|e_i\| \\ \leq& (\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2)^{1/2} \cdot (\sum_{i=1}^n |\psi_i|^2)^{1/2} \\ =& M\|x\|_2,\end{aligned}$$

con lo cual $\|T(x)\| \leq M\|x\|_2$.

Veamos ahora la otra cota. Como $S = \{x : \|x\| = 1\}$, la esfera de $\mathbb{R}^n$ es compacta, $\|T(x)\|$ alcanza su mínimo en S, y no es cero porque $T(x) \neq 0$ para $x \neq 0$.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tenemos

$$\left| T\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \right| \geq m,$$

es decir, $\|T(x)\| \geq m\|x\|_2$. Como

$$m\|x\|_2 \leq \|T(x)\| \leq M\|x\|_2,$$

y T es un homeoformismo.

Como consecuencia, E es un e.n. completo.

Teorema 12.3.7. *Todo espacio normado de dimension finita es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{e_1, \cdots, e_n\}$ una base de E, espacio normado de dimensión finita. Sea $T : \mathbb{R}^n \to E$, con $T(x_1, \cdots, x_n) = x_i e_1 + \cdots + x_n e_n$. Por lo anterior,

$$c_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq c_2\|x\|,$$

y como R^n es completo, E también. □

Teorema 12.3.8. *Todo subespacio vectorial de dimension finita de un espacio normado es un espacio de Banach.*

Demostración. Si F es un subespacio de dimensión finita de un espacio normado E, es completo. □

Como corolario de lo anterior, tenemos:

Teorema 12.3.9. *En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes.*

Teorema 12.3.10. *Sea E un espacio de Banach que no es de dimensión finita. Entonces, no puede tener una base numerable.*

Demostración. Ejercicio: suponga que hay una base numerable $\{e_i\}_{i\geq 1}$, defina $F_n = \langle e_1, \cdots, e_n\rangle$, pruebe que todos tienen interior vacío, y que su unión es todo E. Aplique Baire para caer en el absurdo. □

Una última propiedad interesante de los operadores lineales inversibles de $L(\mathbb{R}^n)$ es la siguiente:

Teorema 12.3.11. *Sea $A = \{T \in L(\mathbb{R}^n)$ inversibles$\}$. Entonces, A es un abierto.*

Demostración. Dado $S \in L(\mathbb{R}^n)$, y T inversible, tenemos $S = T + (S - T)$. Luego, como

$$\|S(x)\| = \|T(x) + (S-T)(x)\| \geq \|T(x)\| - \|(T-S)(x)\|,$$

y además, como T^{-1} es continua,

$$\|x\| = \|T^{-1}T(x)\| \leq \|T^{-1}\|\|T(x)\|,$$

tenemos

$$\|T(x)\| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}\|x\| = \alpha\|x\|.$$

Supongamos que$\|T - S\| < \alpha$. Entonces,

$$\|S(x)\| \geq \alpha\|x\| - \|T-S\|\|x\| > 0,$$

y entonces $S(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. □

Observación 12.3.12. La demostración anterior puede realizarse con otros argumentos (continuidad del determinante, perturbaciones de la forma de Jordan). Una cuarta demostración, que involucra series en espacios de Banach es muy útil .

Ejercicio 12.3.13. Demuestre que la aplicación $T \to T^{-1}$ es continua.

12.4. Funcionales lineales

Definición 12.4.1. Sea $H \subset E$, con E un $\mathbb{K}$ espacio vectorial. Decimos que H es un hiperplano si existe $\varphi : E \to \mathbb{K}$ lineal tal que su núcleo es H.

Teorema 12.4.2. *Sea H un subespacio de E. Son equivalentes:*

(1) H es un hiperplano.

(2) Si $H \subsetneq E$, $S \subsetneq E$, y $H \subset S$, entonces $H = S$.

(3) Existe $L \subset E$ subespacio de dimensión 1, tal que $E = H \oplus L$.

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$: sabemos que existe $\varphi : S \to \mathbb{K}$ cuyo núcleo es H. Si $H \subsetneq S \subsetneq E$, existen $v \in S \setminus H$, $x \in E \setminus S$.

Tenemos que $v \notin H$, con lo cual $\varphi(v) \neq 0$. Sea

$$y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)} v,$$

con lo cual

$$\varphi(y) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)} \varphi(v) = 0,$$

con lo cual $y \in H \subsetneq S$ y también $v\varphi(x)/\varphi(v) \in S$, con lo cual debe ser $x \in S$, absurdo!

Luego, $H = S$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Sea $H \neq E$, con lo cual existe $x \in E \setminus H$. Sea $S = H + \langle x \rangle$, y como $S \neq H$, debe ser $S = E$, con lo cual $E = H + \langle x \rangle$ Claramente es una suma directa: $H \cap \langle x \rangle = \emptyset$ (si $x \notin H$, $\alpha x \notin H$), y nos queda

$$E = H \oplus \langle x \rangle = H \oplus L,$$

con L unidimensional.

$(3) \Rightarrow (1)$: Tenemos que $H \oplus \langle x \rangle = E$, veamos que existe $\varphi : E \to \mathbb{K}$ tal que su núcleo es H. Como cada $y \in E$ se escribe de manera única como $y = h + \lambda x$, definamos $\varphi(y) = \lambda$, que es lineal (verifíquelo!).

Como $H = \varphi^{-1}(0)$, es un hiperplano. □

Teorema 12.4.3. *Sea S un subespacio de E. Entonces $\bar{S}$ es un subespacio.*

Demostración. Tenemos $0 \in S \subset \bar{S}$.

Sean $x, y \in \bar{S}$, veamos que $\lambda x + y \in \bar{S}$ con $\lambda \in \mathbb{K}$. Sabemos que existen $\{x_n\}_{n\geq 1}$, $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset H$ con $x_n \to x$, $y_n \to y$. Entonces,

$$\|\lambda x + y - \lambda x_n + y_n\| \leq |\lambda| \|x - x_n\| + \|y - y_n\| \to 0.$$

□

Teorema 12.4.4. *Sea H un hiperplano de E. Entonces H es un subespacio cerrado o denso.*

Demostración. Tenemos que $H \subset \bar{H} \subset E$, pero $H = \bar{H}$ y es cerrado, ó $\bar{H} = E$ y es denso. □

Teorema 12.4.5. *Sea H un hiperplano de E. Son equivalentes:*

(1) H es cerrado.

(2) H es el núcleo de un funcional lineal continuo.

Demostración. $(2) \Rightarrow (1)$: directo, $H = \varphi^{-1}(0)$, con φ continua.

$(1) \Rightarrow (2)$: Por la caracterización de los hiperplanos, sabemos que existe $v \in E$ tal que $E = H \oplus \langle v \rangle$, y todo $x \in E$ se escribe de manera única como $x = h + \lambda v$, y H es el núcleo de cierta funcional lineal φ. Tenemos $\varphi(x) = \lambda \varphi(v)$, con lo cual podemos escribir

$$x = h + \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)} v.$$

Sea $d = d(x,H) > 0$ pues H es cerrado, y $\bar{H} = \{x \in E\colon d(x,H) = 0\}$, y $x \notin H$ pues $v/\varphi(v) \notin H$. En particular,

$$d(v/\varphi(v),H) = \operatorname{ínf}\left\{ \left\| \frac{v}{\varphi(v)} - h \right\| : h \in H \right\}.$$

Ahora,

$$\|x\| = \left\| h + \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)} v \right\| = |\varphi(x)| \left\| \frac{h}{\varphi(x)} + \frac{v}{\varphi(v)} \right\| = |\varphi(x)| \left\| \frac{v}{\varphi(v)} - \frac{-h}{\varphi(x)} \right\| \geq |\varphi(x)| \cdot d.$$

Luego,

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{d} \|x\|,$$

y H es el núcleo de una funcional lineal continua. □

Capítulo 13

Sucesiones y series de funciones

13.1. Convergencia

Definición 13.1.1. La sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge puntualmente a f en E si para todo $x \in E$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Definición 13.1.2. La sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f en E si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

para todo $x \in E$.

Observación 13.1.3. Si $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a f cuando $n \to \infty$, escribiremos $f_n \rightrightarrows f$.

Veamos una demostración del Teorema de Dini diferente a la que vimos antes:

Teorema 13.1.4. *Sea (E,d) un e.m. compacto, y f_n, $f : E \to \mathbb{R}$ continuas, tal que $f_n(x) \geq f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in E$, y además*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \textit{para todo } x \in E.$$

Entonces, $f_n \rightrightarrows f$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Entonces:

- Para cada $x \in E$ existe n_x tal que si $n \geq n_x$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
- Existe $\delta_0 > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta_0$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pues f es uniformemente continua (E compacto, f continua).

- Existe $\delta_n > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta_n$ entonces $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ pues f_n es uniformemente continua.

Para cada $x \in E$ sea $\delta_x = \text{mín}\{\delta_0, \delta_{n_x}\}$.

Tenemos que $E \subset \cup_{x\in E} B(x, \delta_x)$, y por la compacidad, existen $x_1, \cdots, x_k$ tal que $E \subset \cup_{1\leq i\leq k} B(x_i, \delta_{x_i})$.

Llamemos $n_i = n_{x_i}$. Entonces, si $n \geq n_i$, tenemos $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$.

Sea $y \in B(x_i, \delta_{x_i})$. Entonces, $|f(x_i) - f(y)| < \varepsilon$ pues $\delta_{x_i} < \delta_0$, y también $|f_{n_i}(x_i) - f_{n_i}(y)| < \varepsilon$ pues $\delta_{x_i} < \delta_{n_{x_i}}$.

Veamos finalmente la convergencia uniforme: si $z \in E$, existe i tal que $z \in B(x_i, \delta_{x_i})$. Si $N = \text{máx}\{n_1, \cdots, n_k\}$, tenemos

$$\begin{aligned}|f_n(z) - f(z)| &\leq |f_{n_i}(z) - f(z)| \\ &\leq |f_{n_i}(z) - f_{n_i}(x_i)| + |f_{n_i}(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(z)| < 3\varepsilon\end{aligned}$$

y probamos que $f_n \rightrightarrows f$. □

Ejercicio 13.1.5. Busque la otra demostración en la carpeta (creo que no está en las notas) y compárelas.

13.1.1. Algunas propiedades

Teorema 13.1.6. *Sea $f_n \rightrightarrows f$, con f_n continuas en $[a,b]$. Entonces*

$$\lim_{n\to \text{ínf}} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to \text{ínf}} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Ejemplo 13.1.7. Sea $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $f_m : [0,1] \to \mathbb{R}$. Veamos que converge puntual pero no uniformemente a $f \equiv 0$.

Como $f_n(x) = 0$ para cada n, analicemos un $x > 0$: por el criterio de la raíz,

$$\sqrt[n]{f_n(x)} = \sqrt[n]{nx} e^{-x^2} \to e^{-x^2} < 1,$$

con lo cual $f_n(x) \to 0$ para todo $x \in (0,1]$.

La convergencia no es uniforme, porque

$$\int_0^1 nxe^{-nx^2} = -\frac{e^{-nx^2}}{2}\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{e^{-n}}{2} \to 1 \neq 0.$$

Teorema 13.1.8. *Sean f_n de clase C^1 en (a,b), $f_n \to f$ puntualmente en $[a,b]$, y $f_n' \rightrightarrows g$. Entonces, f es derivable y $f' = g$.*

Teorema 13.1.9. *Si $f_n(x) \rightrightarrows f$ en E, y para todo n f_n es continua en x_0, entonces f es continua en x_0.*

Demostración. Tenemos que $f_n \rightrightarrows f$, y como las f_n son continuas en x_0, también f lo es, pues

$$|f(x_0)-f(x)| \leq |f(x_0)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)| < 3\varepsilon,$$

usando la convergencia uniforme en el primer y tercer módulo para $n \geq n_0$, y usando la continuidad de f_n en el segundo. □

13.2. Stone-Weierstrass

Para probar Stone-Weierstrass veremos que podemos aproximar $\sqrt{t}$ uniformemente con polinomios. La demostración se basa en un viejo algoritmo babilónico utilizado para aproximar $\sqrt{2}$.

Lema 13.2.1. *Existe una sucesión de polinomios tales que $P_n(t) \rightrightarrows \sqrt{t}$ para todo $t \in [0,1]$.*

Demostración. Definamos $P_1(t) \equiv 1$ para todo $t \in [0,1]$, e inductivamente,

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) - \frac{P_n^2(t)-t}{2}.$$

En primer lugar, probemos que $\sqrt{t} \leq P_n(t) \leq 1$ por inducción:

Para $n=1$, todo bien. Asumamos que vale para n, y tenemos que $P_{n+1}(t) \leq P_n(t)$, y además

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) - \frac{(P_n(t)-\sqrt{t})(P_n(t)+\sqrt{t})}{2} \geq P_n(t) - \frac{(P_n(t)-\sqrt{t})\cdot 2}{2} = \sqrt{t},$$

donde usamos que $P_n(t)+\sqrt{t} \leq 2$.

Por monotonía, existe el límite de $P_n(t)$ para cada $t \in [0,1]$, y este límite es mayor o igual a $\sqrt{t}$. Veamos que efectivamente es igual: como

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) - \frac{P_n^2(t)-t}{2}.$$

tomando límite cuando $n \to +\infty$,

$$f(t) = f(t) - \frac{(f^2(t)-t)}{2},$$

es decir, $f^2(t)-t=0$, y por lo tanto $f(t)=\sqrt{t}$.

Finalmente, como $f(t)$ es continua, el Teorema de Dini garantiza la convergencia uniforme. □

Definición 13.2.2. Un subconjunto $\mathscr{A} \subset C(E)$ es un álgebra si es un subespacio vectorial y además, para f, $g \in \mathscr{A}$, entonces $f \cdot g \in \mathscr{A}$.

Decimos que el álgebra $\mathscr{A}$ separa puntos si para cada par x_1, $x_2 \in E$, existe $f \in \mathscr{A}$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Observación 13.2.3. El principal ejemplo de álgebra es la de polinomios.

Observación 13.2.4. Dada un álgebra de funciones $\mathscr{A} \subset E$, y un polinomio $p(t)$ sin término independiente, tiene sentido evaluar $p(f)$ con $f \in \mathscr{A}$, ya que multiplicar funciones del álgebra por sí mismas o por un coeficiente está permitido.

Si el álgebra contiene las funciones constantes, entonces podemos utilizar cualquier polinomio.

Lema 13.2.5. *Sea $\mathscr{A} \subset C(E)$ un álgebra. Entonces $\overline{\mathscr{A}}$ también es un álgebra.*

Claramente, $0 \in \mathscr{A} \subset \overline{\mathscr{A}}$, con lo cual falta demostrar quees cerrada para la suma, el producto por escalares y el producto de elementos de $\overline{\mathscr{A}}$.

Observemos que si f, $g \in \overline{\mathscr{A}}$, entonces existen sucesiones $\{f_n\}_{n\geq 1}$, $\{g_n\}_{n\geq 1} \subset \mathscr{A}$ tales que

$$f_n \to f, \qquad g_n \to g \qquad n \to \infty.$$

Luego,

$$\|(f_n + g_n) - (f + g)\| \leq \|f_n - f\| + \|g_n - f\| \to 0,$$

$$\|\lambda \cdot f_n - \lambda \cdot f\| \leq |\lambda| \cdot \|f_n - f\| \to 0,$$

$$\begin{aligned}\|f_n \cdot g_n - f \cdot g\| &\leq \|f_n \cdot g_n - f_n \cdot g + f_n \cdot g - f \cdot g\| \\ &\leq \|f_n \cdot g_n - f_n \cdot g\| + \|f_n \cdot g - f \cdot g\| \\ &\leq \|f_n\| \cdot \|g_n - g\| + \|f_n - f\| \cdot \|g\| \\ &\leq (\|f\| + 1) \cdot \|g_n - g\| + \|f_n - f\| \cdot \|g\| \to 0.\end{aligned}$$

Usamos en el último paso que, si $f_n \to f$, entonces $\|f_n\| \to \|f\|$. Luego, para $n \geq n_0$, tenemos $-1 < \|f_n\| - \|f\| < 1$

Lema 13.2.6. *Si $\mathscr{A}$ es un álgebra que separa puntos y $f \in \overline{\mathscr{A}}$, entonces $|f| \in \overline{\mathscr{A}}$.*

Demostración. Sea $f \in \overline{\mathscr{A}}$, $f \neq 0$, y definamos g como

$$g(x) = \frac{f^2(x)}{\|f\|^2},$$

$g \in \overline{\mathscr{A}}$ pues es un álgebra. Claramente, $\|g\| \leq 1$, pues $\|f^2\| \leq \|f\|^2$. Tenemos $0 \leq g \leq 1$, y sabemos que existe una sucesión de polinomios $P_n(t)$ que converge uniformemente a $\sqrt{t}$ en $[0, 1]$.

Definimos $G_n(x) = P_n(g(x))$, $G_n : E \to \mathbb{R}$, y como $g \in \overline{\mathscr{A}}$, tenemos $G_n \in \overline{\mathscr{A}}$. Luego, por el lema anterior, si converge su límite estará en $\overline{\mathscr{A}}$.

Veamos que $G_n \rightrightarrows \sqrt{g}$. Como $P_n \rightrightarrows \sqrt{t}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ tenemos

$$\|G_n(\cdot) - \sqrt{\cdot}\| < \varepsilon,$$

con lo cual $|G_n(g(x)) - \sqrt{g(x)}| < \varepsilon$ para todo $x \in E$, y tenemos $G_n \rightrightarrows \sqrt{g}$.

Como $\sqrt{g} = |f|/\|f\| \in \overline{\mathscr{A}}$, que es un álgebra, $|f| \in \overline{\mathscr{A}}$ y el lema queda demostrado. □

Lema 13.2.7. *Si f, $g \in \overline{\mathscr{A}}$, entonces*

$$h(x) = \max f(x), g(x),$$
$$k(x) = \min f(x), g(x),$$

Demostración. Reescribamos

$$h(x) = \frac{1}{2}(|f(x) - g(x)| + f(x) + g(x)),$$
$$k(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|),$$

y ambas están en $\overline{\mathscr{A}}$ por ser cerrada para las operaciones involucradas (suma, resta, tomar módulo, producto por escalares). □

Observación 13.2.8. Claramente, el lema anterior se extiende por inducción al máximo y mínimo de cualquier cantidad finita de funciones del álgebra.

Lema 13.2.9. *Si $\mathscr{A}$ es un álgebra que separa puntos y $1 \in \mathscr{A}$, entonces dados x_1, $x_2 \in E$, y α, $\beta \in \mathbb{R}$, existe $f \in \mathscr{A}$ tal que*

$$f(x_1) = \alpha, \qquad f(x_2) = \beta.$$

Demostración. Sea $h \in \mathscr{A}$ tal que $h(x_1) \neq h(x_2)$. Definimos

$$f(x) = \alpha + \frac{h(x) - h(x_1)}{h(x_2) - h(x_1)} \cdot (\beta - \alpha),$$

que pertenece a $\mathscr{A}$ ya que es un espacio vectorial, y satisface lo pedido. □

Teorema 13.2.10. *Sea E compacto, y $\mathscr{A} \subset C(E)$ un álgebra tal que separa puntos y $1 \in \mathscr{A}$. Entonces, $\overline{\mathscr{A}} = C(E)$.*

Demostración. Sea $f \in C(E)$, $x_0 \in E$, y fijemos $\varepsilon > 0$..

Para cada $x \in E$, existe $g_x \in \overline{\mathscr{A}}$ tal que $g_x(x) = f(x)$, $g_x(x_0) = f(x_0)$, y existe $\delta_x > 0$ tal que si $y \in B(x, \delta_x)$, tenemos

$$g_x(y) \geq f(y) - \varepsilon.$$

Como E es compacto, $E \subset \cup_{x \in E} B(x, \delta_x)$, existen $x_1, \cdots, x_n$ tales que

$$E \subset \cup_{1 \leq i \leq n} B(x_i, \delta_{x_i}).$$

Definamos $g^{x_0}(y) = \max\{g_{x_i}(y) \colon 1 \leq i \leq n\}$. Esta función g^{x_0} satisface $g^{x_0}(x_0) = f(x_0)$, y $g^{x_0}(y) \geq f(y) - \varepsilon$ para todo $y \in E$, pues $y \in B(x_j, \delta_{x_j})$, y $g^{x_0}(y) \geq g_{x_j}(y) \geq f(y) - \varepsilon$.

Luego, dado $x \in E$, existe $g^x \in \overline{\mathscr{A}}$ tal que $g^x(x) = f(x)$, y para todo $y \in E$, $g^x(y) \geq f(y) - \varepsilon$.

Por otro lado, para cada $x \in E$, existe $\delta^x > 0$ tal que si $y \in B(x, \delta^x)$, tenemos $g^x(y) \leq f(y) + \varepsilon$. Igual que antes cubrimos E con estas bolas, extraemos un subcubrimiento, y definimos el mínimo de las g^{x_i} correspondientes. Esa función será la buscada:

Como E es compacto, $E \subset \cup_{x \in E} B(x, \delta^x)$, existen $x_1, \cdots, x_m$ tales que

$$E \subset \cup_{1 \leq i \leq m} B(x_i, \delta^{x_i}).$$

Definamos $h(y) = \min\{g^{x_i}(y) \colon 1 \leq i \leq m\}$. Esta función h satisface $h(x_0) = f(x_0)$, y $h(y) \leq f(y) + \varepsilon$ para todo $y \in E$, pues $y \in B(x_j, \delta_{x_j})$, y $h(y) \leq g^{x_j}(y) \leq f(y) + \varepsilon$.

Por último, como cada $g^{x_i}(y) \geq f(y) - \varepsilon$, tenemos que $h(y) \geq f(y) - \varepsilon$.

Encontramos $h \in \overline{\mathscr{A}}$ tal que $|h(y) - f(y)| < \varepsilon$ para cada $y \in E$, con lo cual $\|h - f\| = \sup_y |h(y) - f(y)| < \varepsilon$.

Repitiendo este procedimiento, con $\varepsilon = 1/k$, en cada caso encontramos una función $h_k \in \overline{\mathscr{A}}$ con $\|h_k - f\| < 1/k$, con lo cual la sucesión $\{h_k\}_k \subset \overline{\mathscr{A}}$ converge a f, y entonces $f \in \overline{\mathscr{A}}$.

El teorema queda demostrado. □

Los siguientes teoremas son consecuencias directas del teorema anterior:

Teorema 13.2.11. *Los polinomios son densos en $C([a,b])$.*

Teorema 13.2.12. *Los polinomios en n variables son densos en $C(K)$, con $K \subset \mathbb{R}^n$, compacto.*

Ejercicio 13.2.13. ¿Las funciones $\{1\} \cup \{sen(nx)\}_{n \geq 1} \cup \{cos(nx)\}_{n \geq 1}$ son densas en $C([0, \pi])$?

Ayuda: analice si son un álgebra. Sería más fácil si fuesen $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y las funciones continuas de $[a,b] \to \mathbb{C}$, ¿verdad?

13.3. Series numéricas

Definición 13.3.1. Sea a_1, $a_2,\cdots$ una sucesión de números complejos ($a_n = u_n + iv_n$). Sea

$$S_n = a_1 + \cdots a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Si S_n converge a un número complejo $S = U + iV$, entonces

$$S = \sum_{n\geq 1} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Observación 13.3.2. Si $a_n = u_n + iv_n$ y $\sum_n a_n$ converge a $S = U + iV$, entonces de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k + i\sum_{k=1}^{n} v_k,$$

tenemos

$$U = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad V = \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Además, $\overline{S_n} \to \overline{S}$, pues al ser finitos términos,

$$\overline{S} = \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{k\geq 1} na_k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 1} n\overline{a_k}.$$

Lema 13.3.3. *Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, entonces la serie $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ es convergente, y además*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k = 0.$$

Demostración. Sea $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, y sea $S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Tenemos

$$a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} = S_{n+p} - S_n$$

Tomando límite en p,

$$\lim_{p\to\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right) = \lim_{p\to\infty} (S_{n+p} - S_n) = S - S_n,$$

luego,

$$\sum_{n+1}^{\infty} a_k = S - S_n,$$

es convergente, y además cuando $n \to \infty$, tenemos que $S - S_n \to 0$. $\square$

Observación 13.3.4. El Teorema anterior es el criterio de Cauchy para convergencia de series: la serie Σa_n es convergente si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que si $n > m \geq n_0$ entonces

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon.$$

Esto es equivalente a decir que la sucesión de sumas parciales es de Cauchy, $|S_n - S_m| < \varepsilon$ para $n, m \geq n_0$.

Definición 13.3.5. La serie Σa_n es absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Teorema 13.3.6. *Una serie absolutamente convergente es convergente.*

Demostración. Sea $\sum a_n$ absolutamente convergente. Ahora,

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

si $m \geq n_0$.

Entonces, $\{S_n\}_{n \geq 1}$ es de Cauchy, y la serie resulta convergente. □

Observación 13.3.7. El criterio de comparación es una consecuencia directa de este razonamiento: si $|a_n| \leq c_n$ y $\sum c_n$ converge, entonces

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \sum_{k=m+1}^{\infty} |c_k| < \varepsilon$$

si $n > m > n_0$ por ser convergente $\sum c_n$ y por lo tanto es de Cauchy la sucesión de sus sumas parciales, con lo cual también es de Cauchy la sucesión de sumas parciales de $\sum a_n$..

13.3.1. Criterios de convergencia

Enunciemos rápidamente los principales criterios de convergencia:

Lema 13.3.8 (Comparación)**.** *Sea Σc_n convergente, y Σa_n con términos complejos tal que $|a_n| \leq c_n$. Entonces Σa_n es absolutamente convergente.*

Lema 13.3.9 (Criterio de la raíz)**.** *Sea Σa_n con términos complejos, y*

$$L = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente. Si $L > 1$, es divergente.

Lema 13.3.10 (Criterio del cociente)**.** *Sean $\{a_n\}_{n\geq 1}$ números complejos no nulos. Sea*

$$\overline{L} = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

$$\underline{L} = \liminf_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Si $\overline{L} < 1$, la serie es convergente. Si $\underline{L} > 1$, la serie es divergente.

Lema 13.3.11. *Sean $\{a_n\}_{n\geq 1}$ números complejos no nulos. Entonces,*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Lema 13.3.12 (Criterio de Dirichlet)**.** *Si la sucesión de sumas parciales A_n de $\sum a_n$ es acotada, y $\{b_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de números reales decreciente y que tiende a cero, entonces $\sum a_n b_n$ converge.*

13.3.2. Operaciones con series

Dadas dos series convergentes $\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$, tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = A + B.$$

Si $c \in \mathbb{C}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cA.$$

El producto de Cauchy de ambas series se define como

$$A \cdot B = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Teorema 13.3.13 (Mertens)**.** *Sean Σa_n y Σb_n dos series convergentes, y sean*

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Entonces, la serie Σc_n converge, y

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = A \cdot B.$$

Demostración. Sean

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_n.$$

Definamos $\beta_n = B_n - B$ y sabemos que $\beta_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Sea $M = \sup_n |\beta_n|$.

Tenemos $C_n = \sum_{j=0}^{n} c_j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}$, y podemos reordenar esta última sumatoria tomando a_i como factor común,

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + a_2 B_{n-2} + \cdots + a_n B_0 \\ &= a_0(B+\beta_n) + a_1(B+\beta_{n-1}) + a_2(B+\beta_{n-2}) + \cdots + a_n(B+\beta_0) \\ &= A_n \cdot B + \gamma_n. \end{aligned}$$

Debemos probar que $\gamma_n \to 0$. Si $n < m$ tenemos

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq |a_0\beta_n + a_1\beta n - 1 + \cdots a_m\beta_{n-m}| + |a_{m+1}\beta_{n-m-1} + \cdots + a_n\beta_0| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{m} a_m \beta_{n-k} \right| + M \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \\ &\leq \varepsilon + M\varepsilon, \end{aligned}$$

el segundo vale tomando $m > m_0$ por la convergencia de la serie de los a_n, y el primero porque fijado m, si $n - m \geq n_0$, podemos obtener $\beta_{n-k} < (a_0 + \cdots + a_m)^{-1}\varepsilon$.

El Teorema queda demostrado. □

13.4. Series de funciones

Definición 13.4.1. Sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones definidas en $E \subset \mathbb{C}$. La serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots,$$

se define como el límite de las sumas parciales para cada $x \in E$,

$$s(z) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(z) = \lim_{n\to\infty} s_n(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_j(z).$$

Teorema 13.4.2 (Weierstrass)**.** *Supongamos que $|u_n(z)| \leq c_n$ para todo $z \in E$, y que $\sum c_n < \infty$. Entonces, la serie $\sum u_n(z)$ converge absoluta y uniformemente sobre E.*

Demostración. Dado $z \in E$, como $\sum |u_n(z)| \leq \sum c_n < \infty$, tenemos la convergencia absoluta.

Ahora, observemos que

$$|s(z) - s_n(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k < \varepsilon$$

si $n \geq n_0(\varepsilon)$, con lo cual la convergencia es uniforme ya que la acotación no depende de z. □

Observación 13.4.3. Recordemos que la suma y el producto de funciones continuas es una función continua. Así, como $f(z) = z$ y $g(z) = cte$ son continuas, tenemos que $f_k = c_k z^k$ es continua para todo $k \geq 0$, y también lo es cualquier polinomio $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$.

Observación 13.4.4. Si una sucesión de funciones continuas f_n converge uniformemente sobre E a f, entonces f es continua sobre E. La demostración la vimos mucho antes, cuando probamos que las continuas con la norma del supremo son un espacio completo.

13.5. Series de potencias

Definición 13.5.1. Dada una sucesión de números complejos, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ es una serie de potencias.

Una serie de potencias puede no coverger para $z \neq 0$, y define una función cuyo dominio son los puntos donde converge.

Teorema 13.5.2. *Existe $R \in [0, +\infty]$ tal que la serie $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolutamente si $|z| < R$, y diverge si $|z| > R$.*

Demostración. Observemos que el criterio de Cauchy implica que si

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \limsup_{n\to\infty} |z| \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

la serie converge, y no si es mayor a 1. Entonces, definimos

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

y el teorema queda demostrado.

□

Teorema 13.5.3. *La serie función $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ es continua en $|z| < R$.*

Demostración. Sea $K \subset B(0,R)$ compacto. Como las funciones $a_n z^n$ son continuas, la convergencia puntual es además uniforme sobre K, y el límite f resulta continuo en K. Tomando una sucesión de compactos, $K_n = \overline{B(0, R - 1/n)}$, el teorema queda demostrado. □

13.5.1. Funciones de variable compleja

Sea Ω un dominio en el plano complejo $\mathbb{C}$ (que como espacio métrico es $\mathbb{R}^2$).

Definición 13.5.4. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Definimos su derivada $f'(z)$ como

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

Observación 13.5.5. Las siguientes propiedades se demuestran con facilidad:

$$\begin{aligned}
&(f+g)' = f' + g' \\
&(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \\
&(c\cdot f)' = c\cdot f' \\
&(g(f(z)))' = g'(f(z))\cdot f'(z)
\end{aligned}$$

Ejemplo 13.5.6. La derivada de z^n es nz^{n-1}. Para calcularla, observemos que

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} z^{n-j}h^{j-1} = nz^{n-1} + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} z^{n-j}h^{j-1}.$$

Observación 13.5.7. Veremos que la serie puede derivarse término a término, pero observemos primero que si R es el radio de convergencia de $\sum a_n z^n$, también lo es de $\sum n a_n z^{n-1}$.

Sea $|z| < R$, entonces existe ρ tal que $|z| < \rho < R$, y $|a_n \rho^n| < c_n$ con $\sum c_n < \infty$. Ahora,

$$|na_n z^{n-1}| \le n\frac{c_n}{\rho}\left(\frac{|z|}{|\rho|}\right)^{n-1}$$

y aplicando el criterio de la raíz, vemos que es convergente.

Teorema 13.5.8. *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, con radio de convergencia R. Si $|z| < R$, entonces*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = f'(z).$$

Demostración. Ejercicio. Relea el ejemplo y la observación anteriores, las claves están ahí. □

Observación 13.5.9. Partiendo de

$$\left(\sum_{n\ge 1} a_n z^n\right)' = \sum_{n\ge 1} n\cdot a_n z^{n-1},$$

una consecuencia interesante es que si una función definida por una serie de potencias es derivable una vez, lo es infinitas veces.

Capítulo 14

Teoremas de punto fijo...

...y otras cosas de la vida!
R. Iorio, el del IMPA, no el de Almafuerte.

14.1. Motivación

Cuando Newton formuló sus leyes para la mecánica, propuso que una partícula de masa m que sigue una trayectoria $x(t)$ en la cual está sujeta a una fuerza $F(x(t))$, satisface la igualdad *fuerza = masa por aceleración*, y como la velocidad es la derivada de la posición, y la aceleración es la derivada de la velocidad, podemos reformular este enunciado como

$$mx''(t) = F(x(t)).$$

Resolver la ecuación (necesitará mucha suerte, o un caso demasiado particular) depende además de dos condiciones extras: la posición y la velocidad en un tiempo t_0 inicial.

En el enfoque moderno de la teoría de ecuaciones diferenciales ya no se pretende resolverlas explícitamente, sino poder analizar cualitativamente su comportamiento. De todos modos, es necesario garantizar a priori la existencia de soluciones, o estaríamos hablando de propiedades de algo que tal vez no exista.

A lo largo del siglo XX aparecieron distintos métodos para estudiar la existencia de soluciones, uno de ellos utiliza teoremas de punto fijo. Existen varios teoremas de punto fijo y llas hipótesis necesarias para aplicarlos varían, pero se procede básicamente de la misma manera en todos los casos.

14.2. Punto fijo

Definición 14.2.1. Sea (E,d) un e.m. Una aplicación $T : E \to E$ se llama un operador de contracción si existe $0 < \alpha < 1$ tal que $d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y)$.

Teorema 14.2.2. *Sea (E,d) un e.m. completo, y $T : E \to E$ un operador de contracción. Entonces T es continuo.*

Demostración. Como $d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y)$, sabemos que si $d(x,y) < \delta = \varepsilon/\alpha$, entonces $d(Tx,Ty) < \varepsilon$. □

Definición 14.2.3. Sea (E,d) un e.m. y $T : E \to E$ un operador de contracción. Decimos que $x \in E$ es un punto fijo de T si $T(x) = x$.

Teorema 14.2.4 (Teorema de Punto Fijo de Cacciopoli-Banach)**.** *Sea (E,d) un espacio métrico completo, y $T : E \to E$ un operador de contracción. Entonces existe un punto fijo de T y es único.*

Demostración. Como T es una contracción, existe $\alpha < 1$ tal que $d(T(x),T(y)) \leq \alpha d(x,y)$.

La unicidad es sencilla: supongamos que existen dos puntos fijos x, y, con lo cual

$$d(x,y) = d(T(x),T(y)) \leq \alpha d(x,y),$$

absurdo ya que $\alpha < 1$ estrictamente.

Para la existencia, tomemos $x_0 \in E$, y definamos iterativamente $x_i = T(x_{i-1}) = T^i(x_0)$, donde T^i es componer T $i-$veces.

Probemos que esta sucesión es de Cauchy: dados n, m, tenemos

$$\begin{aligned}
d(x_n,x_m) &= d(T^n(x_0),T^m(x_0)) \\
&\leq d(T^n(x_0),T^{n+1}(x_0)) + d(T^{n+1}(x_0),T^{m+1}(x_0)) + d(T^{m+1}(x_0),T^m(x_0)) \\
&\leq \alpha^n d(x_0,T(x_0)) + \alpha d(T^n(x_0),T^m(x_0)) + \alpha^m d(T(x_0),x_0) \\
&= \alpha^n d(x_0,T(x_0)) + \alpha d(x_n,x_m) + \alpha^m d(T(x_0),x_0),
\end{aligned}$$

con lo cual

$$(1-\alpha)d(x_n,x_m) \leq (\alpha^n + \alpha^m)d(T(x_0),x_0),$$

y como $\alpha < 1$, tenemos $\alpha^k \to 0$ cuando $k \to \infty$, así que tomando n_0 tal que

$$\alpha^{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{2(1-\alpha)d(T(x_0),x_0)},$$

obtenemos $d(x_n,x_m) \leq \varepsilon$ si n, $m \geq n_0$.

Para finalizar, como el espacio es completo existe $x = \lim x_n$, y como T es continuo,

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

$\square$

Observación 14.2.5. Si analiza la demostración con cuidado, coincidirá que es constructiva ya que partiendo de cualquier punto, genera una sucesión que tiende al punto fijo, y puede controlar el error, ya que tomando límite en m en

$$d(x_n,x_m) \leq \left(\frac{\alpha^n + \alpha^m}{1-\alpha}\right) d(T(x_0),x_0),$$

tenemos

$$d(x_n,x) \leq \left(\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\right) d(T(x_0),x_0),$$

una cota explícita del error que estamos cometiendo.

Observación 14.2.6. La demostración anterior es de B. Palais y R. Palais. La clásica utiliza otro argumento para probar que la sucesión es de Cauchy: si $n < m$,

$$\begin{aligned}
d(x_n,x_m) &\leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1},x_m)\\
&\leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1},x_m) + d(x_m,x_{m+1}) + \cdots\\
&\leq \alpha^n d(x_0,T(x_0)) + \alpha^{n+1} d(x_0,T(x_0)) + \alpha^{n+2} d(x_0,T(x_0)) + \cdots\\
&\leq \alpha^n d(x_0,T(x_0)) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\\
&\leq \alpha^n d(x_0,T(x_0)) \frac{1}{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Observación 14.2.7. No alcanza con pedir $d(T(x),T(y)) < d(x,y)$, el α debe ser estrictamente menor a 1. Sin embargo, alcanza con esta condición si el espacio es compacto, como muestra el próximo teorema.

Teorema 14.2.8. *Sea (E,d) un espacio métrico compacto, y $T : E \to E$ que satisface $d(T(x),T(y)) < d(x,y)$ para todo par de puntos x, $y \in E$. Entonces existe un punto fijo de T y es único.*

Demostración. La unicidad se prueba igual que antes. Para probar la existencia, definamos

$$D = \inf\{d(x,T(x)) : x \in E\}.$$

Esta distancia debe alcanzarse: si existe x_n tal que

$$d(x_n,T(x_n)) \to D,$$

por la compacidad existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}_{j\geq 1}$ que converge a cierto x, y tenemos $d(x,T(x)) = D$. Si $D = 0$, tenemos $d(x,T(x)) = 0$ con lo cual $x = T(x)$ y hay un punto fijo. Si fuese $D > 0$,

$$d(T(x),T(T(x))) < d(x,T(x)) < D,$$

absurdo, ya que D minimizaba. □

14.3. Existencia y unicidad

Teorema 14.3.1. *Supongamos que $f(x,t)$ y $\partial f/\partial x$ son continuas en un entorno Ω del punto (a,b). Entonces existe $\delta > 0$ tal que existe una única solución $x(t)$ para $a-\delta < t < a+\delta$, con $x(a) = b$, de la ecuación diferencial*

$$x'(t) = f(x(t),t).$$

Demostración. Por la continuidad de f y $\partial f/\partial x$ en un entorno Ω de (a,b), podemos tomar un rectángulo

$$Q = \{(t,x) \colon |t-a| \leq \delta,\ |x-b| \leq \varepsilon\} \subset \Omega,$$

tal que

$$|f(t,x)| \leq M, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq L \qquad (t,x) \in Q.$$

En particular, por el teorema del Valor Medio tenemos la siguiente desigualdad:

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

Si hace falta, achicamos el valor de δ, para tener

- $\delta \leq \varepsilon/M$,
- $\delta < 1/L$.

Siempre podemos hacerlo, porque si en el cubo mayor estaban acotadas por M y L, seguirán estando acotadas en uno más chico contenido en el anterior.

Consideremos el espacio $K(b,\varepsilon)$ de funciones continuas en $C[a-\delta, a+\delta]$ tales que

$$|x(t) - b| \leq \varepsilon \qquad \text{si } |t-a| \leq \delta,$$

con la distancia del supremo,

$$d(x,y) = \sup_{|t-a|\leq\delta} |x(t) - y(t)|.$$

Este espacio es completo, y definimos un operador $T : K(b,\varepsilon) \to K(b,\varepsilon)$ por medio de la fórmula

$$\hat{x}(t) = T(x) = b + \int_a^t f(s,x(s))ds \qquad |t-a| \leq \delta.$$

Observemos que

$$|\hat{x}(t) - b| \leq \int_a^t |f(s,x(s))|ds \leq M\delta \leq \varepsilon,$$

con lo cual $\hat{x} \in K(b,\varepsilon)$.

Veamos ahora que T es una contracción:

$$\begin{aligned}
|\hat{x}(t) - \hat{y}(t)| &\leq |\int_a^t f(s,x(s))ds - \int_a^t f(s,y(s))ds| \\
&\leq \int_a^t |f(s,x(s)) - f(s,y(s))|ds \\
&\leq \int_a^t L|x(s) - y(s)|dt \\
&\leq d(x,y)L|t-a| \leq d(x,y)L\delta.
\end{aligned}$$

Como $d(\hat{x},\hat{y}) \leq L\delta d(x,y)$, y tenemos $\delta < 1/L$, el operador T es una contracción, y existe $x \in K(b,\varepsilon)$ tal que $T(x) = x$.

Como

$$x(t) = b + \int_a^t f(s,x(s))ds,$$

tenemos que $x(a) = b$, cumple la condición inicial. Además, por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$x'(t) = f(t,x(t)),$$

y satisface la ecuación diferencial. □

Observación 14.3.2. Uno de los detalles más interesantes del Teorema anterior es una idea que aparecerá más de una vez en el futuro: para resolver un problema en un espacio dado (aquí el espacio es el de las funciones derivables), se cambia el espacio por uno más grande (en este caso, las continuas), se resuelve en este espacio ya que al ser más grande aumentamos las chances de que tenga solución, y luego verificamos que la solución encontrada está en el espacio original.

Observación 14.3.3. En el Teorema anterior pedimos la continuidad de la derivada parcial de f respecto a x. Como se vió en la demostración, alcanza con pedir que f sea Lipchitz en Ω, es decir,

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

Observación 14.3.4. Dada una ecuación de segundo orden $x'' = f(x,x',t)$, podemos transformarla en un sistema de primer orden autónomo, definiendo

$$x = x_1, \quad x' = x_1' = x_2, \quad t = x_3,$$

con lo cual tenemos

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = f(x_1,x_2,x_3) \\ x_3' = 1 \end{cases}$$

y la condición inicial

$$x(t_0) = u, \quad x'(t_0) = v$$

se transforma en

$$x_1(t_0) = u, \quad x_2(t_0) = v, \quad x_3(t_0) = t_0.$$

El teorema se modifica para funciones $x(t) = (x_1(t),x_2(t),x_3(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ y se prueba existencia y unicidad sin mayores inconvenientes.

14.4. Otros teoremas de punto fijo

Existen unos cuantos teoremas de punto fijo, entre los principales podemos mencionar los siguientes:

- Bolzano: toda función continua $f : [a,b] \to [a,b]$ tiene un punto fijo.
- Brouwer: toda función continua $f : B \to B$ con $B \subset \mathbb{R}^n$ convexo tiene un punto fijo.
- Schauder: toda función continua $f : B \to B$ con B convexo y cerrado, y $f(B)$ compacto tiene un punto fijo.
- Schaeffer: toda función continua y compacta $f : B \to B$ con B un Banach tal que el conjunto $\{x \in B\colon x = \lambda f(x =$ para algun $0 \leq \lambda \leq 1\}$ es acotado, tiene un punto fijo.
- Kakutani: sea $f : B \to \mathscr{P}(B) \setminus \emptyset$ una función semicontinua superiormente y convexa con B compacto y convexo en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe $x \in B$ tal que $x \in f(x)$.

Capítulo 15

Diferenciación

15.1. Introducción

Nuestro objetivo en este último capítulo es introducir las herramientas del cálculo diferencial. Lo haremos en espacios de Banach de dimensión arbitraria, ver por ejemplo el libro de Kolmogorov y Fomín, o el detallado artículo de R. Hamilton [4].

Recordemos rápidamente la definición de derivada para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

Definición 15.1.1. Sea $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que f es derivable en $x \in (a,b)$ si existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

Observación 15.1.2. Una definición equivalente es que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-ah}{h} = 0,$$

y en tal caso vemos que $f'(x) = a$, pues

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h}{h} = 0.$$

También podemos pensar que $T(h) = ah$ es una transformación lineal, y tenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-T(h)}{h} = 0.$$

Observación 15.1.3. Una notación habitual en análisis es escribir que un término es un $o(h)$, que leemos "o-chica de h", cuando $h \to a$, para indicar que

$$w(h) = o(h) \text{ si } \lim_{h\to a} \frac{w(h)}{h} = 0.$$

Podemos reescribir la definición de derivada diciendo que cuando $h \to 0$,

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+o(h).$$

Es decir, aproximamos f en un entorno de x por una transformación lineal, y el error que cometemos tiende a cero dividio por h.

15.2. Diferenciación en espacios de Banach

En esta sección E, F son espacios de Banach con normas $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_F$, aunque las llamaremos indistintamente $\|\cdot\|$.

Veremos que hay dos posibles generalizaciones de la derivada, igual que en el cálculo de varias variables: la diferencial, y la derivada direccional. La diferenciabilidad es un concepto más fuerte, ya que implica la existencia de derivadas direccionales, mientras que el concepto de derivada direccional es más débil, y se necesitan condiciones auxiliares para garantizar la diferenciabilidad.

15.2.1. Derivada de Frechet (fuerte)

Definición 15.2.1. Sea $\Omega \subset E$ un abierto conexo, y $f:\Omega \to F$. Decimos que f es diferenciable en el sentido de Frechet en $x \in \Omega$ si existe $A_x \in L(E,F)$, un operador lineal continuo $A_x : E \to F$ tal que

$$f(x+h)-f(x)=A_x h+o(\|h\|)$$

cuando $h \to 0$.

Teorema 15.2.2. *Si f es diferenciable en x, el operador A_x es único.*

Demostración. Supongamos que existen A, B tales que

$$f(u+h)-f(u)=Ah+o(\|h\|)=Bh+o(\|h\|).$$

Entonces, cuando $h \to 0$,

$$Bh-Ah=o(\|h\|).$$

Si existe $h_0 \in E$ tal que $Bh_0 \neq Ah_0$, entonces

$$0=\lim_{t\to 0}\frac{Bth_0-Ath_0}{t\|h_0\|}=\frac{Bh_0-Ah_0}{\|h_0\|},$$

absurdo. □

Observación 15.2.3. El operador $A_x = Df(x)$ es la diferencial de Frechet de f en x. Cuando $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$, es la transformación lineal asociada a la matriz jacobiana con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.

Definición 15.2.4. Si $f : \Omega \subset E \to F$ es diferenciable en U. Decimos que f es de clase C^1 si la aplicación de E en $L(E,F)$ que a cada $x \in U$ le asigna $Df(x)$ es continua.

Teorema 15.2.5. *Se tienen las siguientes propiedades:*

(1) Si $f(x) \equiv z_0$ para todo $x \in U \subset E$, entonces $Df(x) = 0$.

(2) Si $f, g : U \to F$ son diferenciables, y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $D(\lambda f + g) = \lambda Df + Dg$.

(3) Si $f : E \to F$ es un operador lineal acotado, entonces $Df = f$.

(4) Si $f : E \to F$ es diferenciable en x, entonces es continua en x.

(5) (Regla de la cadena) Si $f : E \to F$ es diferenciable en x_0, y $g : F \to G$ es diferenciable en $y_0 = f(x_0)$, entonces $D(g \circ f) = Dg(y_0) \cdot Df(x_0)$.

Demostración. Veamos cada una:

(1) Como $f(x+h) - f(x) = z_0 - z_0 = 0$, con $Df(x) = 0$ se cumple la condición de diferenciabilidad.

(2) Tenemos

$$\begin{aligned}(\lambda f + g)(x+h) - (\lambda f + g)(x) &= \lambda(f(x+h) - f(x)) + g(x+h) - g(x) \\ &= \lambda(Df(x)h + o_1(\|h\|)) + Dg(x)h + o_2(\|h\|) \\ &= (\lambda Df(x) + Dg(x))h + o(\|h\|),\end{aligned}$$

pues $o(\|h\|) = \lambda o_1(\|h\|) + o_2(\|h\|) \to 0$ cuando $\|h\| \to 0$.

(3) Pues $f(x+h) - f(x) = f(h)$, y $f \in L(E,F)$.

(4) Como f es diferenciable, $\|Df\|$ es acotada por alguna constante c, y si $\|h\|$ es suficientemente chico, $o(\|h\|) \leq \varepsilon\|h\|$. Entonces

$$\begin{aligned}\|f(x+h) - f(x)\|_F &\leq \|Df(x)h\|_F + \|o_1(\|h\|)\|_F \\ &\leq c\|h\|_E + \varepsilon\|h\|_E \\ &= (c+\varepsilon)\|(x+h) - x\|_E\end{aligned}$$

y f resulta continua.

(5) Por ser diferenciables, tenemos

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Df(x_0)h+o_1(\|h\|),$$

$$g(y_0+k)-g(y_0)=Dg(y_0)k+o_2(\|k\|),$$

Ahora,

$$\begin{aligned} g(f(x_0+h))-g(f(x_0) &= g(y_0+k)-g(y_0) \\ &= Dg(y_0)k+o_2(\|k\|)) \\ &= Dg(y_0)[f(x_0+h)-f(x_0)]+o_2(\|k\|)) \\ &= Dg(y_0)[Df(x_0)h+o_1(\|h\|)]+o_2(\|k\|)) \\ &= Dg(y_0)Df(x_0)h+Dg(y_0)o_1(\|h\|)+o_2(\|k\|). \end{aligned}$$

Como $\|Dg\| \leq c$ al ser un operador acotado, y

$$o_2(\|k\|)=o_2(\|f(x_0+h)-f(x_0)\|)=o(\|h\|)$$

pues f es continua, y nos queda

$$Dg(y_0)o_1(\|h\|)+o(\|h\|)\to 0$$

cuando $\|h\|\to 0$.

□

Observación 15.2.6. Sean E_1, E_2 dos espacios de Banach y su producto $E=E_1\times E_2$ con la norma $\|x,y\|_E=\|x\|_{E_|}+\|y\|_{E_2}$. Si $f:E\to F$ es diferenciable en (x_0,y_0), entonces existen las derivadas parciales de f en (x_0,y_0), que satisfacen

$$f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)=D_xf(x_0,y_0)h+o_1(\|h\|),$$

$$f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)=D_yf(x_0,y_0)k+o_1(\|k\|),$$

donde $D_x\in L(E_1,F)$, $D_y\in L(E_2,F)$.

Además, vale la fórmula de la derivada total,

$$\begin{aligned} f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0) &= Df(x_0,y_0)(h,k)+o(\|h\|+\|k\|) \\ &= D_xf(x_0,y_0)h+D_yf(x_0,y_0)k+o(\|h\|+\|k\|) \end{aligned}$$

cuando $h\to 0$, $k\to 0$.

Observación 15.2.7. En general, dados $E_1, \cdots, E_n$ y $F_1, \cdots, F_m$, espacios de Banach, podemos considerar sus productos con las normas

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\|_E = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_{E_i}, \quad \|(y_1, \cdots, y_m)\|_F = \sum_{i=1}^{m} \|y_i\|_{F_i},$$

y m funciones

$$f_j : E_1 \times \cdots \times E_n \to F_j.$$

Podemos enunciar el siguiente resultado: la función $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$ es diferenciable si y sólo si son diferenciales todas las componentes f_j.

La demostración queda como ejercicio, pero observe que de f pasamos a la componente f_j vía la proyección $\pi_j : F \to F_j$, es decir, $\pi_j(y) = y_j$, que es lineal, y utilice ahora la Regla de la cadena. La otra implicación es más sencilla.

15.2.2. Derivada de Gateaux

Definición 15.2.8. Sea $\Omega \subset E$ un abierto conexo, y $f : \Omega \to F$. La derivada direccional de f en x en la dirección de $h \in E$ se define como el límite

$$\frac{d}{dt} f(x + t \cdot h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot h) - f(x)}{t}.$$

Teorema 15.2.9. *Si f es diferenciable en x, entonces existen las derivadas direccionales y*

$$\frac{d}{dt} f(x + t \cdot h) = Df(x)h.$$

Demostración. Sea $h \in E$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x + t \cdot h) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot h) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot Df(x)h}{t} + \lim_{t \to 0} \frac{o(t \cdot \|h\|)\|h\|}{t \cdot \|h\|} \\ &= Df(x)h. \end{aligned}$$

y el teorema queda demostrado. □

Observación 15.2.10. Se puede demostrar también que si las derivadas de Gateaux de f existen para todo h en un entorno de x y son continuas, entonces f es diferenciable.

Observación 15.2.11. Dado que es más sencillo calcular un límite en una variable antes que trabajar con operadores lineales entre espacios de Banach, una forma de calcular la diferencial de Frechet es calcular la de Gateaux y tratar de aplicar el teorema anterior. Si falla, aún así la derivada de Gateaux por lo general nos sugiere un candidato (piense cuando calculaba las derivadas parciales y las utilizaba como posible diferencial).

Ejemplo 15.2.12. Veamos algunos ejemplos.

1. Sea $E = C([0,1])$ con la norma $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x(t)| : 0 \le t \le 1\}$, y $f : E \to E$, definida como $f(x) = x^2$. Entonces, $Df(x)h = 2x(t)h(t)$. Como

$$\begin{aligned}\frac{(x(t)+s\cdot h(t))^2 - x(t)^2}{s} &= \frac{x(t^2)+2s\cdot x(t)h(t)+s^2\cdot h(t)^2 - x(t)^2}{s}\\ &= 2\cdot x(t)h(t)+s\cdot h(t)^2\\ &\to 2\cdot x(t)h(t) \quad \text{cuando } s\to 0,\end{aligned}$$

podemos suponer que $Df(x) : E \to E$ es multiplicar la función $h(t)$ por $2x(t)$. Es lineal, y tenemos

$$(x(t)+h(t))^2 - x(t)^2 = 2x(t)h(t)+h(t)^2,$$

y claramente $h(t)^2 = o(\|h\|)$ cuando $\|h\| \to 0$.

2. Sea $E = \ell_2 = \{\{a_n\}_{n\ge 1} : \sum a_n^2 < \infty\}$ con la norma $\|\{a_n\}_{n\ge 1}\|_2 = (\sum a_n^2)^{1/2}$. Sea $f : \ell_2 \to \mathbb{R}$ definida en $a = \{a_n\}_{n\ge 1}$ como $f(a) = \|a\|^2$. Dado $h \in \ell_2$, calculemos

$$\begin{aligned}\frac{\sum(a_n+s\cdot h_n)^2 - \sum a_n^2}{s} &= \frac{\sum(a_n^2+2s\cdot a_nh_n+s^2\cdot h_n^2) - \sum a_n^2}{s}\\ &= \sum 2\cdot a_nh_n + s\cdot h_n^2\\ &\to \sum 2\cdot a_nh_n \quad \text{cuando } s\to 0,\end{aligned}$$

Necesitamos probar que esto tiene sentido, y que la serie que queda es convergente. Recordemos que $2|a_nh_n| \le a_n^2+h_n^2$, pues

$$0 \le a_n^2+h_n^2-2|a_nh_n| = (a_n-h_n)^2,$$

y como $\sum a_n^2, \sum h_n^2 < \infty$ pues a y h están en ℓ_2, la serie es convergente.

Se puede verificar ahora que $Df(a) = 2\langle a,\cdot\rangle$, es decir,

$$Df(a)(h) = 2\sum a_nh_n.$$

3. Sea $E = C^1([0,1])$, con la norma $\|x\|_E = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$. Definimos $f : E \to C([0,1])$ (con $\|x\|_\infty$) como $f(x) = x(t)x'(t)$. Aquí,

$$\frac{[x(t)+sh(t)][x'(t)+sh'(t)] - x(t)x'(t)}{s} = x'(t)h(t)+x(t)h'(t)+sx'(t)h'(t)$$

que tiende a $x'(t)h(t) + x(t)h'(t)$ cuando $s \to 0$.

Dejemos como ejercicio comprobar que $Df(x)h = [x(t)h(t)]'$, y veamos que la función f es de clase C^1. Para eso, necesitamos probar que $x \to (x(t)\cdot)'$ es continua.

Sean $x, y \in E$, y recordemos que

$$\|Df(x) - Df(y)\| = \sup\{\|[Df(x) - Df(y)](h)\| : h \in E,\ \|h\|_E \leq 1\}.$$

Entonces, como

$$\begin{aligned}
\|[Df(x) - Df(y)](h)\| &= \|x'h + xh' - y'h - yh'\|_\infty \\
&\leq \|x-y\|_\infty \|h'\|_\infty + \|x'-y'\|_\infty \|h\|_\infty \\
&\leq \|x-y\|_\infty(\|h\|_\infty + \|h'\|_\infty) + \|x'-y'\|_\infty(\|h\|_\infty + \|h'\|_\infty) \\
&= (\|x-y\|_\infty + \|x'-y'\|_\infty)(\|h\|_\infty + \|h'\|_\infty) \\
&= \|x-y\|_E \|h\|_E, \\
&\leq \|x-y\|_E
\end{aligned}$$

resulta continua.

4. Sea $E = C^1([0,1])$, con la norma $\|x\|_E = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$. Para $t_0 \in (0,1)$ introduzcamos δ_{t_0} la Delta de Dirac en t_0, tal que $\delta_{t_0}(x) = x(t_0)$. Definamos la función
$$f = \delta_{t_0} \circ \frac{d}{dt} : E \to \mathbb{R}.$$
Tenemos que f es diferenciable, y por ser lineal y continua, $Df = f$.

   Que derivar y evaluar son lineales, es obvio. Verifique que son continuas.

5. Sea $E = C^1([0,1])$, con la norma $\|x\|_E = \|x\|_\infty$, y $t_0 \in (0,1)$. Ahora, $f = \delta_{t_0} \circ \frac{d}{dt} : E \to \mathbb{R}$ no es diferenciable. ¿Por qué?

6. El último ejemplo es apenas una introducción a una serie de problemas de la física matemática, y una de las herramientas empleadas en su resolución, el cálculo de variaciones.

   Consideremos un péndulo de masa m, colgando del origen de coordenadas en el plano euclídeo (x,y) con un hilo inextensible de longitud ℓ. A cada tiempo t, forma un ángulo $\theta(t)$ con el semieje negativo de las ordenadas.

   En una posición $(x(t), y(t))$ la energía del péndulo viene dada por dos términos, la cinética y la potencial:
$$E_C = \frac{m}{2}(\ell\theta')^2, \qquad E_P = -mg\ell cos(\theta).$$

y el principio de mínima acción de Hamilton afirma que la función que describe el moviento del péndulo (u otros sistemas físicos) en el intervalo de tiempo $[0,T]$ debe ser un extremal de

$$J(\theta(t)) = \int_0^T E_C - E_P dt = m\ell \int_0^T \frac{\ell}{2}(\theta'(t))^2 + gcos(\theta(t))dt,$$

donde g es la aceleración de la gravedad ($g \approx \pi^2$, Wilkins definió el metro en el s. XVII como la longitud del pendulo cuyo período era de 2 segundos).

Observemos que $J : C^1([0,T]) \to \mathbb{R}$, y si suponemos que $\theta(t)$ es un extremal, como $J(\theta(t) + s \cdot h(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un extremo en $s = 0$, debe ser

$$J'(\theta(t) + s \cdot h(t))\big|_{s=0} = 0.$$

Pero esta expresión es la derivada de Gateaux de $J(\theta)$ en h, y nos queda

$$\lim_{t\to 0} \frac{J(\theta + s \cdot h) - J(\theta)}{t} = m\ell \int_0^T \ell\theta'(t)h'(t) - gsen(\theta(t))h(t)dt$$

(compruébelo!). Claramente, podemos descartar el factor $m\ell$, e integrando por partes la primera expresión, podemos reescribirlo como

$$0 = J'(\theta(t)) = -\int_0^T [\ell\theta''(t) + gsen(\theta(t))]h(t)dt,$$

y si esta expresión es cero para cualquier h, entonces debe ser

$$\theta''(t) + \frac{g}{\ell} sen(\theta(t)) = 0.$$

Esta es una ecuación de segundo orden, un problema de Sturm Liouville, y para resolverlo necesitamos dos condiciones extras, por ejemplo la posición y la velocidad a $t = 0$, es decir, $\theta(0)$ y $\theta'(0)$.

Una observación final: esta ecuación tal como está no puede resolverse. Cuando θ es chico, podemos aproximar $sen(\theta) \approx \theta$, y si buscamos por ejemplo una solución tal que $\theta(0) = 0$, y $\theta'(0) = a$, en este caso encontramos la solución de la forma

$$\theta(t) = a\sqrt{\frac{\ell}{g}} sen\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t\right).$$

15.2.3. El teorema del valor medio

Uno de los resultados más importantes del cálculo en una variable es el Teorema del valor medio de Lagrange:

Teorema 15.2.13. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, y derivable en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Lamentablemente, extenderlo a $f : E \to F$, con E, F espacios de Banach, requiere utilizar una versión del teorema de Hahn-Banach, y las demostraciones de este teorema dependen del Axioma de Elección. Es posible evitar Hahn-Banach, utilizando un argumento de conexión, ver la demostración en el excelente libro de Jost [5].

Teorema 15.2.14. *Sea $v \in F$, un espacio de Banach. Entonces existe una funcional lineal continua $\varphi : F \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi(v) = \|\varphi\| \cdot \|v\|.$$

Observe que este teorema es obvio en dimensión finita. En $\mathbb{R}^n$, por ejemplo, dado x podemos completar una base utilizando la base canónica; si $x_1 \neq 0$, podemos tomar $\{x, e_2, \cdots, e_n\}$, y definimos

$$\varphi(a_1 x + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n) = a_1 \|x\|,$$

que es lineal y continua, $\|\varphi\| = 1$ y $\varphi(x) = \|x\|$.

Veamos cómo demostrar valor medio asumiendo este resultado.

Teorema 15.2.15. *Sea $f : \Omega \subset E \to F$ diferenciable Frechet tal que el segmento $\{(1-t)x + ty \colon 0 \le t \le 1\} \subset \Omega$ para todo x, $y \in \Omega$. $f(0) = x$, $f(1) = y$. Entonces existe $t_0 \in (0,1)$ tal que*

$$\|f(y) - f(x)\|_F \le \sup_{0<t<1} \|Df((1-t_0)x + t_0 y)\|_{L(E,F)} \|y - x\|_E.$$

Demostración. Sea $\varphi : F \to \mathbb{R}$ la funcional lineal continua tal que

$$\varphi(f(y) - f(x)) = \|\varphi\| \|f(y) - f(x)\|,$$

(por Hahn-Banach) y definamos $g(t) : [0,1] \to \mathbb{R}$ componiendo,

$$g(t) = \varphi(f[ty + (1-t)x])$$

y es diferenciable Frechet pues es composición de funciones que lo son.

Por el teorema de valor medio de Lagrange usual,

$$g(1) - g(0) = g'(t_0)(1-0),$$

y por la regla de la cadena tenemos

$$\varphi(f(y)) - \varphi(f(x)) = D\varphi|_{f[t_0 y + (1-t_0)x]} \, Df|_{t_0 y + (1-t_0)x} (y - x).$$

Como φ es lineal y continua, tenemos

$$\varphi(f(y)-f(x)) = \varphi\left(Df|_{t_0y+(1-t_0)x}(y-x)\right).$$

El lado derecho lo podemos acotar recordando que φ y Df son operadores lineales continuos y por lo tanto acotados, y el izquierdo lo reemplazamos por el valor de $\varphi(f(y)-f(x))$:

$$\|\varphi\|\|f(y)-f(x)\| \leq \|\varphi\|\| Df|_{t_0y+(1-t_0)x}\|\|y-x\|.$$

Por último, cancelamos $\|\varphi\|$ y tomamos supremo en t, obteniendo la desigualdad buscada:

$$\|f(y)-f(x)\| \leq \sup_{0<t<1} \|Df((1-t_0)x+t_0y)\|\|y-x\|,$$

y el teorema queda demostrado. $\square$

15.2.4. Teorema de la función inversa

Observación 15.2.16. Enunciaremos el teorema para $f : E \to F$ de clase C^1, $f(a) = b$ con $a \in E$, $b \in F$, tal que $Df(a)$ es lineal, biyectiva y continua.

(1) En dimensión finita, todo operador lineal es continuo, pero entre espacios de Banach arbitrarios, es el teorema de isomorfismos de Banach:

Teorema 15.2.17. *Sea $A \in L(E,F)$ biyectivo. Entonces A^{-1} es acotado.*

Es consecuencia directa del Teorema de la Aplicación Inversa, y no lo vamos a demostrar aquí.[1]

(2) Podemos suponer que $a = 0$, $b = 0$, $E = F$ y $Df(a) = Id$. Como $[Df(a)]^{-1}$ es un isomorfismo entre F y E, tenemos $\hat{f} : E \to E$ definida como $\hat{f}(x) = [Df(a)]^{-1}[f(x)-f(a)]$. Esta función cumple las condiciones, y es diferenciable pues es composición de funciones diferenciables.

(3) Sea $\Omega \subset E$ abierto, $K \subset F$ cerrado, con E, F espacios de Banach. Sea

$$C(\Omega,K) = \{\varphi : \Omega \to F \,:\, \varphi \text{ continuas y acotadas}\},$$

$$\|\varphi-\psi\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)-\psi(s)|$$

como son acotadas, este supremo es finito.

[1] No se preocupe, lo verá en el primer mes de clases en Análisis Funcional.

Sabemos que este espacio es completo, pues una sucesión de funciones que sea de Cauchy converge puntualmente gracias a la completitud de F, y con la norma anterior el límite (puntual) es en realidad uniforme y pertenece al espacio.

Esto nos permitirá aplicar el Teorema de Punto Fijo de Cacciopoli-Banach.

Ahora sí, enunciemos y probemos el teorema:

Teorema 15.2.18. *$f : E \to E$ de clase C^1 en un entorno de $a \in E$, $f(a) = b$ con $b \in F$, diferenciable, tal que $Df(a)$ es lineal, biyectiva y continua. Entonces existen entornos $U \subset E$, $V \subset F$, con $a \in U$ y $b \in V$, tal que $f : U \to V$ es biyectiva, y la inversa $f^{-1} : V \to U$ es diferenciable en b, con $Df^{-1}(b) = [Df(a)]^{-1}$.*

Demostración. Separemos la prueba en distintas etapas.

(i) De acuerdo con la observación anterior, suponemos $a = 0$, $b = 0$, $E = F$ y $Df(a) = I$, la identidad.

(ii) Definamos una función $g : E \to E$,

$$g(x) = f(x) - x.$$

Esta función es C^1, vale $g(0) = 0$, y $Dg(0) = 0$.

(iii) Existe $r > 0$ tal que en $W = \{x\colon \|x\| < r\}$, $\|Dg(x)\| < 1/2$, pues g es C^1, la función que manda $x \to Dg(x)$ es continua, y la norma también lo es.

En particular, si $x, y \in \bar{W}$, se tiene

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|,$$

por el teorema de valor medio.

(iv) Tenemos que $f|_{\bar{W}}$ es inyectiva, pues

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|g(x) + x - g(y) - y\| \\ &\geq \|x - y\| - \|g(x) - g(y)\| \\ &\geq \|x - y\| - \frac{1}{2}\|x - y\| \\ &= \frac{1}{2}\|x - y\|. \end{aligned}$$

(v) Con $y = 0$, vemos que $\|g(x)\| \leq \|x\|/2$. Si definimos $V = \{y\colon \|y\| < r/2\}$, tenemos $g : W \to V$.

(vi) Busquemos $\varphi : V \to \bar{W}$ continua que verifique $f(\varphi(y)) = y$ para todo $y \in V$. Como $g(x) = f(x) - x$, esto es equivalente a pedir $g(\varphi(y)) + \varphi(y) = y$. Es decir,

$$\varphi(y) = y - g(\varphi(y)).$$

Por la observación previa al teorema, $C = C(V, \bar{W})$ con $\| \cdot \|_\infty$ es un espacio completo, y tiene sentido definirse un operador de contracción, porque tendrá un punto fijo. Sea $T : C \to C$,

$$T(\varphi) = \hat{\varphi}, \qquad \hat{\varphi(y)} = y - g(\varphi(y)).$$

(vii) Verifiquemos que $T(C) \subset C$. Tenemos que $\hat{\varphi}$ resulta continua, y está definida en V. Además

$$\|\hat{\varphi}(y)\| = \|y - g(\varphi(y)\| \le \|y\| + \|g(\varphi(y)\| \le \frac{r}{2} + \frac{1}{2}\|\varphi(y)\| \le \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

pues $\varphi(y) \in \bar{W}$, la bola de radio r. Luego, $\bar{\varphi} : V \to \bar{W}$.

(viii) Veamos que T es contracción. Para cada y,

$$\|\bar{\varphi}(y) - \bar{\psi}(y)\| = \|g(\varphi(y)) - g(\psi(y))\| \le \frac{1}{2}\|\varphi(y) - \psi(y)\|.$$

Tomando supremo tenemos que $\|T(\varphi) - T(\psi)\| \le \|\varphi - \psi\|/2$, es contracción.

(ix) Por el Teorema de Punto Fijo, existe φ tal que $\varphi = T(\varphi)$, esto es

$$f(\varphi(y)) = y \quad \text{para todo } y \in V.$$

Dado $y \in V$, el punto $x = \varphi(y)$ es el único que satisface

- $x \in W$,
- $f(x) = y$.

Definimos $U = W \cap f^{-1}(V)$, con lo cual es una biyección: la función $f|_U$ es inyectiva pues $f|_W$ lo es. Además, todo punto de V es imagen de uno de U. Luego, es un homeomorfismo ya que $\varphi = (f|_U)^{-1}$ es continua.

Además, como vimos en el punto (iv), si $y_1, y_2 \in W$, con $x_1 = \varphi(y_1), x_2 = \varphi(y_2)$,

$$\|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\| \le 2\|y_1 - y_2\|,$$

y por lo tanto f^{-1} es uniformemente continua.

En particular, tomando $y_2 = 0$, nos queda $\|\varphi(y)\| \le 2\|y\|$, que es equivalente a $\|x\| \le 2\|f(x)\|$.

(x) Veamos que $\varphi = f^{-1}$ es diferenciable en 0. Queremos probar que

$$\varphi(y) - \varphi(0) - [Df(0)]^{-1}(y-0) = o(\|y\|).$$

Como $y = f(x)$, $\varphi(y) = x$ y $\varphi(0) = 0 = f(0)$, reescribimos esta expresión,

$$\begin{aligned} \|x - 0 - [Df(0)]^{-1}(f(x) - f(0))\| &= \|x - [Df(0)]^{-1}f(x)\| \\ &= \|[Df(0)]^{-1}[Df(0)x - f(x)]\| \\ &\leq |-1|M\|f(x) - Df(0)x\| \\ &\leq Mo(\|x\|) \end{aligned}$$

donde $M = \|[Df(0)]^{-1}\|$.

Queríamos ver que era $o(\|y\|)$, con $y = f(x)$, y tenemos

$$\frac{o(\|x\|)}{\|f(x)\|} = \frac{\|x\|}{\|f(x)\|}\frac{o(\|x\|)}{\|x\|} \leq 2\frac{o(\|x\|)}{\|x\|} \to 0,$$

(xi) Fin. $\square$

15.2.5. Comentarios adicionales

Teorema de la función implícita

Veamos un último teorema importante, el Teorema de la Función Implícita. Por suerte, su demostración es más corta dado que asumimos que vale el Teorema de la Función Inversa.

Teorema 15.2.19. *Sean $U \subset E_1$, $V \subset E_2$ abiertos, y $f : U \times V \to F$ de clase C^1. Sean $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ y supongamos que $D_yf(x_0, y_0) : E_2 \to F$ es lineal, biyectiva y continua. Entonces existen abiertos $U_0 \subset E_1$, $W_0 \subset F$ con $x_0 \in U_0$, $f(x_0, y_0) \in W_0$ y una función $g : U_0 \times W_0 \to V$ de clase C^1 tal que para todo $(x, w) \in U_0 \times W_0$ se tiene*

$$f(x, g(x, w)) = w.$$

Demostración. Sea $G(x, y) = (x, f(x, y))$, una función auxiliar $F : U \times V \to E_1 \times F$. Su diferencial está dada por

$$DG(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ D_xf & D_yf \end{pmatrix}$$

con Id la matriz identidad de E_1, y DF es un isomorfismo (lineal, biyectiva, continua y con inversa continua) de $E_1 \times E_2$ con $E_1 \times F$. Luego, existe una inversa local $G^{-1} : U_0 \times W_0 \to U \times V$ con

$$G^{-1}(x, w) = (x, g(x, w)),$$

que es la función buscada.

Por la regla de la cadena aplicada a $f(x,g(x,w))$, tenemos

$$D_x g(x,w) = -[D_y f(x,g(x,w))]^{-1} \circ D_x(f(x,g(x,w)))$$

$$D_y g(x,w) = [D_y f(x,g(x,w))]^{-1}.$$

El teorema queda demostrado. □

Observación 15.2.20. Si quiere la versión usual de los cursos de análisis, fije $w = 0$, o avance unas páginas.

La inversa contraataca

En el Teorema de la Función Inversa pedimos f de clase C^1 y sólo probamos que f^{-1} era diferenciable para cada punto de la imagen (piénselo un rato: a y $b = f(a)$ eran arbitrarios en tanto f fuese diferenciable en a, y lo era en todo un entorno).

Podemos ir más lejos, y probar que f^{-1} es de clase C^1. Para esto necesitamos probar dos cosas: que los operadores lineales acotados inversibles de E son un abierto, y que invertir (mandar un operador en su inverso) es continuo. Es decir, dado $\varepsilon > 0$, exite $\delta > 0$ tal que si $\|Df(a) - Df(x)\| < \delta$, entonces $Df(x)$ es inversible y además $\|[Df(a)]^{-1} - [Df(x)]^{-1}\| < \varepsilon$.

Ambas son sencillas en dimensión finita, y más complicadas en un espacio de Banach.

(1) El conjunto de los operadores lineales acotados inversibles de E es un abierto en $L(E)$.

En particular, si $\|A\| = \delta < 1$, entonces $(I - A) \in L(E)$ es inversible, donde $I : E \to E$ es la identidad. Una demostración rápida sale utilizando la misma idea detrás de la convergencia de la serie geométrica, pues

$$(I-A) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} A^j \right) = \left(\sum_{j=0}^{N} A^j \right) \cdot (I-A) = I - A^{N+1}.$$

El operador $(I-A)^{-1} = \sum_{j \geq 0} A^j$ está bien definido y es continuo, pues

$$\left\| \sum_{j\geq 0} A^j(x) \right\| \leq \sum_{j\geq 0} \|A^j(x)\| \leq \sum_{j\geq 0} \delta^j \|x\| = \frac{1}{1-\delta} \|x\|.$$

Observemos que, para cada $x \in E$, tenemos entonces

$$(1 - \delta^{N+1})\|x\| \leq \|x\| - \|A\|^{N+1}\|x\| \leq \|x - A^{N+1}x\|,$$

$$(1+\delta^{N+1})\|x\| \geq \|x\| + \|A\|^{N+1}\|x\| \geq \|x - A^{N+1}x\|,$$

Lo utilizaremos de la siguiente forma: como $Df(a)$ es la identidad, y f es C^1, entonces $Df(x)$ será inversible para todo x en un entorno de a.

(2) Tenemos también la continuidad de las inversas: si $x \to a$, y $Df(x) \to Df(a)$ entonces $[Df(x)]^{-1} \to [Df(a)]^{-1}$.

Observemos que si A, B son operadores acotados inversibles, con inversas acotadas, entonces

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B-B)B^{-1},$$

con lo cual

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|B-A\| \cdot \|B^{-1}\| \to 0$$

si $\|B-A\| \to 0$.

No hace falta entrar en más detalles, estos temas serán estudiados en profundidad más adelante.

15.3. Diferenciación en $\mathbb{R}^n$

Esta sección es un caso particular de la anterior. La agregamos porque es la notación habitual de los cursos de análisis (incluyendo Cálculo Avanzado).

15.3.1. Definiciones básicas

Definición 15.3.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio (conjunto abierto y conexo), y $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Decimos que f es diferenciable en $x \in \Omega$ si existe una transformación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{\|h\|} = 0.$$

Teorema 15.3.2. *Si f es diferenciable en x, la aplicación lineal A es única.*

Demostración. Supongamos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Bh}{\|h\|} = 0.$$

Entonces, cuando $h \to 0$,

$$\frac{|Bh - Ah|}{\|h\|} = \frac{|(f(x+h) - f(x) - Bh) - (f(x+h) - f(x) - Ah)}{\|h\|} \to 0.$$

Ahora, $L = B - A$ es nula, ya que para todo x con $\|x\| = 1$,

$$|Bx - Ax| = \frac{|Btx - Atx|}{|t|} \to 0 \qquad \text{cuando } t \to 0.$$

□

Observación 15.3.3. Notaremos $A = Df(x)$, y la matriz con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ se llama la matriz jacobiana de f en el punto x.

Teorema 15.3.4. *Sea f diferenciable en x. Entonces f es continua en x.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\|f(x+h) - f(x)\| &\leq \|f(x+h) - f(x) - Ah\| + \|Ah\| \\ &\leq \|h\| \left(\frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|}{\|h\|} \right) + \|A\|\|h\| \to 0\end{aligned}$$

cuando $\|h\| \to 0$, y por lo tanto, f es continua en x. □

Teorema 15.3.5. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal. Entonces, $Df(x) = f(x)$.*

Demostración. Tenemos

$$\frac{f(x+h) - f(x) - f(h)}{\|h\|} = \frac{f(x) + f(h) - f(x) - f(h)}{\|h\|} = 0.$$

□

Teorema 15.3.6. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \cdots, f_m)$. Entonces, f es diferenciable en x si y sólo si lo son las funciones f_i, con $1 \leq i \leq m$.*

Además, $Df(x) = (Df_1(x), \cdots, Df_m(x))$.

Demostración. Supongamos que f es diferenciable en x. Componemos con la proyección en la coordenada i, y tenemos $f_i = \pi_i \circ f$. La proyección es diferenciable por ser lineal, con lo cual f_i es composición de funciones diferenciables, y

$$Df_i(x) = \pi_i \circ Df(x).$$

Para la otra implicación, supongamos que cada f_i es diferenciable en el punto x, y sea $T_i = Df_i(x)$. Definimos $A(h) = (T_1(h), \cdots, T_m(h))$. Como cada T_i es lineal, A lo es. Tenemos

$$0 \leq \frac{|f(x+h) - f(x) - A(h)|}{\|h\|} \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{|f_i(x+h) - f_i(x) - T_i(h)|}{\|h\|} \to 0.$$

Luego, $A = Df$.

□

Teorema 15.3.7 (Regla de la cadena)**.** *Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ diferenciable en x, y $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ diferenciable en $y = f(x)$. Entonces, $g \circ f$ es diferenciable en x, y*

$$D(g \circ f) = Dg|_{f(x)} \circ Df|_x.$$

Demostración. Ejercicio, por aburrido. □

Teorema 15.3.8. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in U$, y x_0 un extremo de f. Entonces $Df(x_0) = 0$.*

Demostración. Como U es abierto, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x-y\| < \delta$ entonces $y \in U$. Sea h de norma 1, y definimos $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ como $g(t) = f(x_0 + th)$. Esta función es derivable, y tiene un extremo en 0, con lo cual $g' = 0$. Pero

$$0 = g'(0) = Df|_{x_0}(h) = \langle \nabla f(x_0), h \rangle$$

Luego, para cada h, tenemos

$$0 = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right), h \right\rangle$$

y eligiendo $h = e_i$, el $i-$ésimo vector canónico, tenemos que cada derivada parcial es nula en x_0. □

Teorema 15.3.9. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en $x \in (a,b)$, y sean $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$, $\{\beta_n\}_{n\geq 1}$ dos sucesiones que convergen a x tales que*

$$a < \alpha_n < x < \beta_n < b.$$

Entonces $f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$.

Demostración. Ejercicio, porque la notación es pesada. □

Teorema 15.3.10. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, y U conexo (para todo par x, $y \in U$ el segmento que los conecta está incluído en U). Dados x, $y \in U$, existe t_0 tal que $z = x + t_0(y-x)$ satisface*

$$f(y) - f(x) = \langle \nabla f(z), (y-x) \rangle.$$

Demostración. Esta sí, porque es corta: sea $u = y - x$, y definamos $g(t) = f(x + tu)$, que es diferenciable en (a,b), y tenemos

$$f(y) - f(x) = g(1) - g(0) = g'(t_0), \qquad t_0 \in (0,1).$$

Además,

$$g'(t_0) = \langle \nabla f(x + t_0 u), u \rangle = \langle \nabla f(z), (y-x) \rangle,$$

y la demostración queda terminada. □

Teorema 15.3.11. *Sea Q un cubo cerrado, $Q \subset U \subset \mathbb{R}^n$, y $f : Q \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en el abierto U, tal que para cada i, j y todo $x \in Q$ se tiene*

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leq M.$$

Entonces para todo par x, $y \in Q$ se tiene

$$\|f(x) - f(y)\| \leq n^2 M \|x - y\|.$$

Demostración. Como en (y por) el teorema anterior, para cada i tenemos $g_i = f_i(y + t(x-y))$, y

$$\|f_i(x) - f_i(y)\| = \langle \nabla f_i(z), (x-y) \rangle \leq \sum_{j=1}^{n} M\|x-y\| = nM\|x-y\|.$$

Luego,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - f_i(y)| \leq n^2 M \|x-y\|,$$

y la demostración queda terminada. □

15.3.2. Inversa

El siguiente Lema será necesario en la demostración del teorema de la aplicación inversa.

Lema 15.3.12. *Sea g de clase C^1 en un entorno del punto a, tal que $Dg(a) = 0$. Entonces, existe un cubo Q centrado en a tal que*

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|$$

para todo x, $y \in Q$.

Demostración. Tenemos que para $1 \leq i \leq m$, y para $1 \leq j \leq n$,

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) = 0.$$

Entonces, por la continuidad de las derivadas parciales, dado $\varepsilon > 0$, existe $\gamma > 0$ tal que si $|x_j - a_j| < \gamma$ para $1 \leq j \leq n$, se cumple

$$\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right| \leq \varepsilon,$$

con lo cual, por el teorema del valor medio,

$$\|g(x) - g(y)\| \leq n^2 \varepsilon \|x - y\|.$$

Si elegimos $\varepsilon = 1/(2n^2)$, terminamos la demostración. □

Teorema 15.3.13 (Teorema de la Aplicación inversa)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en un entorno del punto a. Si $det(Df(a)) \neq 0$, entonces existe un entorno abierto V del punto a, y un entorno W de $f(a)$ tal que la restricción $f|_V$ es un homeomorfismo de V sobre W. Además, $f^{-1} : W \to V$ es de clase C^1.*

Demostración. La demostración de este teorema es larga, separémosla en partes.

Sea $A = Df(a)$, y consideremos la función auxiliar $\varphi = A^{-1} \circ f$. Tenemos

$$D\varphi(a) = DA^{-1} \cdot Df(a) = A^{-1} \cdot A = Id,$$

con lo cual podemos suponer de ahora en más que $Df(a)$ era la matriz identidad.

Introduzcamos la función auxiliar $g(x) = f(x) - x$, y observemos que

$$Dg(a) = Df(A) - Id(a) = 0$$

Por el Lema que ya demostramos, existe un cubo cerrado Q centrado en a tal que para todo $x, y \in Q$, se tiene

- $|f(x) - f(y)| \geq |x-y|/2,$
- $|g(x) - g(y)| \leq |x-y|/2,$
- $det(Df(x)) \neq 0.$

Tomemos $x \in \partial Q$, y $b = f(a)$. Tenemos que $b \notin f(\partial Q)$, que es un compacto, con lo cual

$$d(b, f(\partial Q)) = \delta > 0.$$

Introduzcamos

$$W = \{u \colon d(u,b) < \delta/2\} = \{u \colon |u-b| < \delta/2\}.$$

Tenemos $f(x) \in f(\partial Q)$, y si $u \in W$,

$$|f(x) - u| \geq |b - f(x)| - |u-b| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} > |f(a) - u|,$$

con lo cual si $x \in \partial Q$, entonces $|f(x) - u| > |f(a) - u|$.

Definamos

$$\varphi(x) = |f(x) - u|^2 = \sum_{i=1}^{n} [f_i(x) - u_i]^2.$$

Esta función restringida al cubo Q alcanza un valor mínimo en un punto x y en tal punto,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{n} 2[f_i(x) - u_i] \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = 0.$$

Ahora, en el centro del cubo teníamos que $det(Df) = 1$, con lo cual si Q es suficientemente chico, el determinante no puede anularse. Supongamos que para algún i se tiene $f_i(x) \neq u_i$. Entonces, para todo j deben anularse todas las derivadas parciales de f_i, absurdo, pues Df tendría una fila de ceros.

Entonces, para cada $u \in W$, existe $x \in Q$ tal que $f(x) = u$.

Definamos $V = f^{-1}(W) \cap Q^o$, que es un abierto y contiene al punto a, y tenemos una biyeccion $f|_V : V \to W$.

Veamos que f^{-1} es continua. Sean u, $v \in W$, con $x = f^{-1}(u)$, $y = f^{-1}(v)$. Entonces,

$$|u-v| = |f(x)-f(y)| \geq \frac{1}{2}|x-y| = \frac{1}{2}|f^{-1}(u)-f^{-1}(v)|,$$

con lo cual

$$|f^{-1}(u)-f^{-1}(v)| \leq 2|u-v|,$$

y por lo tanto f^{-1} es uniformemente continua.

Veamos que f^{-1} es diferenciable. Sea $b = f(a)$, y dado h, llamemos $b+k = f(a+h)$.

Claramente, $a = f^{-1}(b)$ y $a+h = f^{-1}(b+k)$. Además, por la continuidad,

$$\lim_{k\to 0} h = 0.$$

Sea $A = Df(a)$, entonces

$$k = f(a+h)-f(a) = Ah+|h|\omega(h), \qquad lim_{h\to 0}\omega(h) = 0,$$
$$h = f^{-1}(b+k)-f^{-1}(b).$$

Le aplicamos A^{-1} y obtenemos

$$A^{-1}k = h+|h|A^{-1}\omega(h) \quad \Rightarrow \quad h = A^{-1}k-|h|A^{-1}\omega(h).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{|h|}{|k|} &= \frac{|A^{-1}k-|h|A^{-1}\omega(h)|}{|k|}\\ &\leq \frac{|A^{-1}k|+|h|A^{-1}\omega(h)}{|k|}\\ &\leq C\frac{|k|}{|k|}+\frac{|h|}{|k|}|A^{-1}\omega(h)|.\end{aligned}$$

Como $\omega(h)$ tiende a cero, podemos acotar $|A^{-1}\omega(h)| \leq 1/2$, y tenemos

$$\frac{|h|}{|k|} \leq C+\frac{1}{2}\frac{|h|}{|k|}, \Rightarrow \frac{|h|}{|k|} \leq 2C,$$

y el cociente está acotado.

Luego, $A^{-1} = Df^{-1}(b) = [Df(a)]^{-1}$.

Finalmente, para ver que es de clase C^1, como las matrices son un abierto (preimagen de las de determinante distinto de cero), si $Df(a)$ es inversible en a, y $x \to Df(x)$ es continua en un entorno de a, si tomamos r suficientemente chico, tendremos $Df(x)$ inversible si $\|a-x\| < r$.

Por otra parte, observemos que invertir, $A \to A^{-1}$ es continua, pues la inversa puede obtenerse diviendo la matriz de cofactores de A por el determinante de A. El determinante es continuo respecto de los coeficientes, y la matriz de cofactores se obtiene evaluando A en $[p(t)-p(0)]/t$, donde p es el polinomio característico de A, con lo cual invertir es continua, y entonces $[Df(x)]^{-1} \to [Df(a)]^{-1}$ cuando $x \to a$.

Terminamos.

□

15.3.3. Implícita

Supongamos que tenemos m funciones de $n+m$ variables,

$$f_i(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = 0, \quad 1 \le i \le m.$$

Uno esperaría poder despejar m variables en función de las restantes, tal que $y = \varphi(x)$, y $f_i(x, \varphi(x)) = 0$ para $1 \le i \le m$.

Es decir, llamando $f(x,y) = (f_i(x,y), \cdots, f_m(x,y))$, buscamos $U \subset \mathbb{R}^n$ y $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ tal que $f(x, \varphi(x)) = 0$ en U.

Si las f_i fueran transformaciones lineales, sabemos que podemos despejar m variables (triangulando por Gauss, por ejemplo) si tenemos un bloque de la matriz asociada de $m \times m$ inversible. Veremos que en el caso no lineal, la idea es la misma, si reemplazamos las funciones por sus diferenciales.

Teorema 15.3.14 (Teorema de la función implícita). *Sea $f(x,y) : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ de clase C^1 en un entorno de $(a,b) \in \mathbb{R}^{n+m}$. Supongamos que $f(a,b) = 0$, y $det(D_y f) \neq 0$. Entonces existen entornos A de a, y B de b tales que para todo $x \in A$ existe un único $y = \varphi(x) \in B$ tal que $f(x,y) = 0$.*

Demostración. Sea $F(x,y) = (x, f(x,y))$, una función auxiliar $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ que satisface

$$F(a,b) = (a, f(a,b)) = (a, 0).$$

Su diferencial es una matriz en bloques

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ * & Df \end{pmatrix}$$

con Id la matriz identidad de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Esta matriz es inversible pues su determinante es el mismo de Df (se puede comprobar desarrollando el determinante por las primeras n filas, por ejemplo).

Luego, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la Función Inversa, y F^{-1} es un homeomorfismo entre dos abiertos W y Q. Esta inversa es de la forma

$$F^{-1}(x,y) = (x, g(x,y)),$$

ya que las primeras coordenadas no son modificadas por F. Tenemos entonces

$$(x,y) = F(F^{-1}(x,y)) = (x, f(x, g(x,y))),$$

lo cual implica que $y = f(x, g(x,y))$.

En particular, si $y = 0$, tenemos $f(x, g(x,0)) = 0$, siempre y cuando $(x,0) \in W$.

Sea $A = \{x\colon (x,0) \in W\} \subset Q$, claramente $a \in A$ y A es abierto.

Tenemos $\varphi(x) = g(x,0)$ definida para $x \in A$, y entonces

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \qquad x \in A.$$

Sean $x \in A$, $y \in B$ con $f(x,y) = 0$. Entonces,

$$F(x,y) = (x, f(x,y)) = (x,0) \in W,$$

y aplicando F^{-1},

$$(x,y) = (x, g(x,0)) = (x, \varphi(x)),$$

es decir, $y = \varphi(x)$.

La demostración queda terminada. $\square$

Bibliografía

[1] R. Baire, Sur les fonctions de variables reelles. Bernardoni de C . Rebeschini & Co. (1899)

Disponible en https://archive.org/details/surlesfonctions00bairgoog

[2] R. Courant, D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, vol. I, Interscience Publishers, Inc., New York, 1953.

Este libro no tiene nada que ver con la materia, pero vale la pena leerlo alguna vez en la vida.

[3] R. Courant (y luego F. John), Introducción al Cálculo y al Analisis Matemático, Ed. Limusa, México.

Este sí tiene que ver con la materia, son dos volúmenes, y cubre análisis en una y varias variables, geometría euclídea, ecuaciones diferenciales y análisis complejo. Tiene algo de algebra lineal y de geometría diferencial.

[4] R. S. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc. 7 (1982), 65-222.

Se baja legalmente de la revista. Es uno de los tantos ejemplos posibles de matemáticas en serio que puede comenzar a estudiar por su cuenta.

[5] J. Jost, Postmodern analysis. Springer, 2005.

El título solo ya demuestra la conveniencia de leerlo.

[6] A. Kechris, *Set theory and uniqueness for trigonometric series*, preprint, 1997.

Excelente survey del problema de unicidad, introduce y utiliza muchos de los conceptos que se estudian en Avanzado, Real y Funcional.

[7] J. Kelley, Topología general, Eudeba.

[8] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, Elementos de la teoria de funciones y del analisis funcional, MIR, 1975.

Tal vez el mejor libro para leer durante la cursada.

[9] E. Lages Lima, Espacios metricos, IMPA.

Lindo, aunque no seguimos su orden. Con muchos ejercicios de distinta dificultad.

[10] J. Marsden, A. Tromba. Cálculo vectorial. Addison Wesley, 1991.

Un libro que la mayoría odia cuando cursa, pero admira cuando por fin entendió el análisis en varias variables. O algo parecido, depende de cada uno. Aproveche a releerlo tras haber estudiado la parte de cálculo diferencial, y comprobará que no era tan informal como parecía.

[11] J. Munkres, Topology.

Este lo va a tener que estudiar en serio más adelante, pero puede utilizarlo si está impaciente respecto a los ordinales transfinitos.

[12] R. Noriega, Calculo diferencial e integral. Ed. Docencia, 1979.

Un clásico para resultados en una variable.