

## PRÁCTICA 4: COMPLETITUD

**Ejercicio 1.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función que satisface:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c d(x_1, x_2)$$

para todos  $x_1, x_2 \in X$ , donde  $c \geq 0$ . Probar que  $f$  es uniformemente continua.

**Ejercicio 2.**

i) Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos,  $A \subseteq X$  y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Probar que si existen  $\alpha > 0$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  sucesiones y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que

a)  $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$  y

b)  $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$  para todo  $n \geq n_0$ ,

entonces  $f$  no es uniformemente continua en  $A$ .

ii) Verificar que la función  $f(x) = x^2$  no es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ . ¿Y en  $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$ ?

iii) Verificar que la función  $f(x) = \text{sen}(1/x)$  no es uniformemente continua en  $(0, 1)$ .

**Ejercicio 3.**

i) Sea  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  una función uniformemente continua y sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy en  $X$ . Probar que  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $Y$ .

ii) Sea  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  un homeomorfismo uniforme. Probar que  $(X, d)$  es completo si y sólo si  $(Y, d')$  es completo.

En particular, si un espacio métrico  $X$  es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformemente equivalente.

**Ejercicio 4.**

i) Dar un ejemplo de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y continua pero no uniformemente continua.

ii) Dar un ejemplo de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  no acotada y uniformemente continua.

**Ejercicio 5.** Sea  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  una función uniformemente continua, y sean  $A, B \subset X$  conjuntos no vacíos tales que  $d(A, B) = 0$ . Probar que  $d'(f(A), f(B)) = 0$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ . Probar que:

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  si y sólo si para toda subsucesión  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ .

- ii) Si existe  $x \in X$  para el cual toda subsucesión  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tiene una subsucesión  $(x_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_{k_j}} = x$ , entonces  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge y  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .
- iii) Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente, entonces  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?
- iv) Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy, entonces es acotada.
- v) Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy y tiene una subsucesión  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \in X$ , entonces  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge y  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

**Ejercicio 7.** Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico  $X$  es un subespacio completo de  $X$ , entonces  $X$  es completo.

**Ejercicio 8.** Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de un espacio métrico. Probar que si  $A$  y  $B$  son completos, entonces  $A \cup B$  y  $A \cap B$  son completos.

**Ejercicio 9.** Probar que todo espacio métrico con la métrica discreta es completo.

**Ejercicio 10.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

- i) Probar que todo subespacio completo de  $(X, d)$  es un subconjunto cerrado de  $X$ .
- ii) Probar que si  $X$  es completo, entonces todo subconjunto  $F \subseteq X$  cerrado, es un subespacio completo de  $X$ .

**Ejercicio 11.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos. Probar que  $(X \times Y, d_\infty)$  es completo si y sólo si  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  son completos.

**Ejercicio 12.**

- i) Sea  $X$  un espacio métrico y sea  $B(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es acotada}\}$ . Probar que  $(B(X), d_\infty)$  es un espacio métrico completo, donde  $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ .
- ii) Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Probar que  $(C[a, b], d_\infty)$  es un espacio métrico completo, donde  $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$ .
- iii) Probar que  $C_0 := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid a_n \rightarrow 0\}$  es un espacio métrico completo con la distancia  $d_\infty((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$ .

**Ejercicio 13.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $\mathcal{D} \subset X$  un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$  converge en  $X$ . Probar que  $X$  es completo. (Se puede usar este resultado para probar la existencia de la completación de todo espacio métrico de manera alternativa a la estudiada en clase, copiando la idea de la construcción de  $\mathbb{R}$  a partir de  $\mathbb{Q}$ ).

**Ejercicio 14.** Probar que todo espacio métrico completo separable y no contable tiene cardinal  $c$ .

**Ejercicio 15.** Sea  $X = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$  y sea  $((Y, d'), i)$  su completación. Calcular el cardinal de  $Y \setminus i(X)$ .

**Ejercicio 16.** Probar que  $\mathbb{R}^n$  no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

**Ejercicio 17.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea  $D$  un subconjunto denso y numerable de  $X$ . Probar que  $D$  no es un  $G_\delta$ .

**Ejercicio 18.** Demostrar que no existe ninguna función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que sea continua sólo en los racionales.

*Sugerencia:* Para cada  $n \in \mathbb{N}$  considerar

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} / \exists U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \text{diam}(f(U)) < \frac{1}{n} \right\}.$$

**Ejercicio 19.** Sea  $(X, d)$  espacio métrico. Se dice que un conjunto  $A \subset X$  es *nunca denso* si  $(\overline{A})^\circ = \emptyset$ .

1. Probar que si  $A$  es nunca denso, entonces  $X - A$  es denso. ¿Vale el recíproco?
2. Probar que si  $A$  es abierto y denso, entonces  $X - A$  es nunca denso.

**Ejercicio 20.** Sea  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de intervalos de  $[0, 1]$  con extremos racionales y para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea

$$E_n = \{ f \in C[0, 1] / f \text{ es monótona en } I_n \}.$$

- i) Probar que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n$  es cerrado y nunca denso en  $(C[0, 1], d_\infty)$ .
- ii) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo  $[0, 1]$  que no son monótonas en ningún subintervalo.

**Ejercicio 21.** Sea  $(X, d)$  espacio métrico y  $A \subset X$ . Probar que son equivalentes:

1.  $A$  es nunca denso;
2. toda bola  $B$  abierta contiene otra  $B_1 \subset B$  abierta tal que  $B_1 \cap A = \emptyset$ ;
3.  $A$  no es denso en ninguna bola abierta.

**Ejercicio 22.** Sea  $Lip[a, b] = \{ f \in C[a, b] / \exists k > 0, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \}$ . Probar que  $Lip[a, b]^\circ = \emptyset$  en  $C[a, b]$ .