PRÁCTICA 2: ESPACIOS MÉTRICOS

Ejercicio 1. Sean d_1, d_2, d_3, d_4, $d_5 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por:

$$d_1(x,y) = (x-y)^2, \qquad d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|},$$
$$d_3(x,y) = \left|x^2 - y^2\right|, \qquad d_4(x,y) = |x-2y|,$$
$$d_5 = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

Decidir cuáles de ellas son métricas en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Sean d_1, d_2, $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas por

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \qquad d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2},$$
$$d_\infty(x,y) = \sup_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$$

para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

i) Probar que estas funciones son métricas.

ii) Para $n = 2$, dibujar las bolas abiertas $B(0,1)$ de centro $0 \in \mathbb{R}^2$ y radio 1.

Notar que la métrica d_2 del ejercicio 2 es la métrica usual de $\mathbb{R}^n$. En adelante, a menos que se indique una métrica diferente, supondremos que $\mathbb{R}^n$ tiene dicha métrica.

Ejercicio 3. Sea X un conjunto y sea $d : X \times X \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Verificar que d es una métrica, y hallar los abiertos de (X,d).
Nota: δ se llama la *métrica discreta* en X.

Ejercicio 4. Sea $p \in \mathbb{N}$ un primo fijo, y sea $N : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dada por

$$N(a) := \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } p^n \mid a \text{ y } p^{n+1} \nmid a; \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Sea $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dada por $d(a,b) := N(a-b)$. Probar que $(\mathbb{Z}, d)$ es un espacio métrico.

Ejercicio 5. Sea $\ell^\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty\}$ y sea $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ dada por $d(a,b) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$, donde $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son elementos de ℓ^∞.
Probar que (ℓ^∞, d) es un espacio métrico.

Ejercicio 6. Dados números reales $a < b$, sea $C[a,b]$ el conjunto de todas las funciones de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ que son continuas. Probar que $(C[a,b], d_1)$ y $(C[a,b], d_\infty)$ son espacios métricos, donde

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx, \qquad d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|\,.$$

Ejercicio 7. Sea (X,d) un espacio métrico. Se define $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$.

i) Probar que d' también es una métrica en X, que satisface $0 \le d'(x,y) < 1$ para todos $x, y \in X$.

ii) Probar que un subconjunto $A \subset X$ es abierto para la métrica d si y sólo si lo es para la métrica d'.

iii) Deducir que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto x con la métrica d si y sólo si también converge a x con la métrica d'.

Ejercicio 8. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Consideremos el conjunto $X_1 \times X_2$ y la aplicación $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$.

i) Probar que d es una métrica en $X_1 \times X_2$.

ii) Probar que en el espacio métrico $(X_1 \times X_2, d)$ se cumple que una sucesión $((a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto (a,b) si y sólo si converge en cada coordenada, es decir si y sólo si $a_n \to a$ en (X_1,d_1) y $b_n \to b$ en (X_2,d_2).

Ejercicio 9. Sea $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos, y consideramos el producto cartesiano $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. El objetivo de este ejercicio es construir una métrica para X en la cual la convergencia de una sucesión equivalga a la convergencia en cada coordenada, como en el ejercicio anterior.

i) Supongamos primero que todos los X_n tienen diámetro menor o igual que 1, es decir $d_n(x,y) \le 1$ para todos $n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in X_n$. Dados dos elementos $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, definimos
$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}.$$
Probar que d es una métrica en X.

ii) Sea $x^1, x^2, x^3, \ldots$ una sucesión de puntos de X, es decir, cada x^k es una sucesión $(x_1^k, x_2^k, \ldots)$ en la cual $x_n^k \in X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un elemento de X. Probar que, con la métrica d definida en el ítem anterior, $x^k \to x$ en X si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_n^k \to x_n$ en X_n.

iii) Mostrar cómo se puede reducir el caso general (es decir sin tener la hipótesis $\mathrm{diam}(X_n) \le 1$) al caso ya resuelto.

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico.

i) Sea $(F_i)_{i\in I}$ una familia de subconjuntos cerrados de X. Probar que $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ es cerrado.

ii) Sean $\{F_1, \ldots, F_n\}$ subconjuntos cerrados de X. Probar que $F = \bigcup_{j=1}^{n} F_j$ es cerrado.

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espacio métrico, y sean $A, B \subset X$.

i) Probar las siguientes propiedades del *interior* de un conjunto:

a) $A^\circ = \{x \in X : \exists r > 0 : B(x, r) \subset A\}$.
b) A es abierto $\iff A^\circ = A$.
c) $\emptyset^\circ = \emptyset$ y $X^\circ = X$.
d) $A \subset B \Longrightarrow A^\circ \subset B^\circ$.
e) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?
f) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$. ¿Vale la igualdad?

ii) Probar las siguientes propiedades de la *clausura* de un conjunto:

a) A es cerrado $\iff \overline{A} = A$.
b) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{X} = X$.
c) $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
d) $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. ¿Se puede generalizar a una unión infinita?
e) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?
f) $x \in \overline{A} \iff$ existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $x_n \to x$.

iii) Probar las siguientes propiedades que relacionan interior y clausura:

a) $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$.
b) $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$.
c) ¿Son ciertas las igualdades $\overline{A} = \overline{A^\circ}$ y $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

iv) Probar las siguientes propiedades de la *frontera* de un conjunto.

a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.
b) ∂A es cerrado.
c) $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

Ejercicio 12. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $G \subset X$ abierto y $F \subset X$ cerrado. Probar que $F \setminus G$ es cerrado y $G \setminus F$ es abierto.

Ejercicio 13. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $a \in X$ y $r > 0$, el conjunto

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$$

se llama *bola cerrada* de centro a y radio r.

i) Probar que $\overline{B}(a,r)$ es un conjunto cerrado y contiene a $\overline{B(a,r)}$.

ii) Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a,r)$ cuya clausura no sea la bola cerrada $\overline{B}(a,r)$.

Ejercicio 14. Sean (X,d) un espacio métrico, p un punto de X y a,b números reales tales que $0<a<b$. Probar que:

i) $\{x \in X \ / \ a < d(x,p) < b\}$ es abierto;

ii) $\{x \in X \ / \ a \leq d(x,p) \leq b\}$ es cerrado.

Ejercicio 15. Sean (X,d_X) e (Y,d_Y) dos espacio métricos y consideremos al conjunto $X \times Y$ dotado de la métrica d definida en el Ejercicio 8. Probar que si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, entonces

i) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$;

ii) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Ejercicio 16. Sea (X,d) un espacio métrico, y sean $A,B \subset X$.

i) Probar las siguientes propiedades del *derivado* de un conjunto.

   a) A' es cerrado.
   b) $A \subset B \Longrightarrow A' \subset B'$.
   c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
   d) $\overline{A} = A \cup A'$.
   e) $(\overline{A})' = A'$.

ii) Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subset X$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $x_n \neq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 17. Hallar interior clausura, frontera y conjunto derivado de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

$$[0,1] \quad ; \quad (0,1) \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{Q} \cap [0,1] \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad [0,1) \cup \{2\}.$$

Ejercicio 18. Caracterizar los abiertos y los cerrados de $\mathbb{Z}$ considerado como espacio métrico con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 19. Probar que toda colección de conjuntos abiertos disjuntos de $\mathbb{R}^n$, con la métrica usual, es a lo sumo numerable. Dar un ejemplo de colección de conjuntos cerrados disjuntos que no sea numerable.

Ejercicio 20. Sea $\mathcal{B} := \{B(q,r) \subset \mathbb{R}^n : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$. Probar que si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

Ejercicio 21. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ con la métrica usual. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de condensación* de S si para todo $r > 0$, se tiene que $B(x, r) \cap S$ es no numerable. Probar que si S es no numerable entonces existe un punto $x \in S$ de condensación de S.

Ejercicio 22. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, con la métrica usual. Probar que el conjunto de puntos aislados de S es contable.

Ejercicio 23. Sea (X, d) un espacio métrico, sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones en X, y sean x, $y \in X$.

i) Probar que si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

ii) Probar que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy, entonces la sucesión de números reales $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Ejercicio 24. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que un subconjunto $A \subseteq X$ es un *conjunto G_δ* si es la intersección de una familia numerable de abiertos de X, y que es un *conjunto F_σ* si es la unión de una familia numerable de cerrados de X.

i) Probar que el complemento de un conjunto G_δ es un conjunto F_σ.

ii) Probar que el complemento de un conjunto F_σ es un conjunto G_δ.

iii) Probar que todo cerrado es un conjunto G_δ y todo abierto es un conjunto F_σ.

iv) a) Encontrar una familia numerables de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0, 1)$. Ídem para $[0, 1]$.
   b) Encontrar una familia numerable de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0, 1)$.
   c) ¿Qué conclusión puede extraerse de estos ejemplos?

Ejercicio 25. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A \subseteq X$ es no vacío y $x \in X$, se define la *distancia de x a A* como

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Probar las siguientes afirmaciones:

i) Si x, $y \in X$, entonces $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

ii) $x \in A \implies d(x, A) = 0$.

iii) $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

iv) Si $r > 0$, el conjunto $B(A, r) = \{x \in X : d(x, A) < r\}$ es abierto.

v) Si $r > 0$, el conjunto $B[A, r] = \{x \in X : d(x, A) \leq r\}$ es cerrado.

Ejercicio 26. Sea (X, d) un espacio métrico. Si A, $B \subseteq X$ son subconjuntos no vacíos, se define la *distancia entre A y B* como

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) $d(A,B) = d(\overline{A}, \overline{B})$.

ii) $d(A,B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$.

iii) $d(A,B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

iv) Para todo $C \subseteq X$ no vacío es $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$.