Práctica 1: Órdenes y cardinalidad

Ejercicio 1. Sea A un cadena (o sea, un conjunto con un orden total) y sea B un conjunto parcialmente ordenado. Sea $f : A \to B$ una función inyectiva que es un morfismo de orden. Probar que si $a, a' \in A$ y $f(a) \leq f(a')$, entonces $a \leq a'$.

Ejercicio 2. Sea A un conjunto y sea $\prec$ un preorden en A, es decir una relación reflexiva y transitiva. Sea $\sim$ la relación en A definida por $a \sim b$ si $a \prec b$ y $b \prec a$.

1. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
2. Probar que el cociente $A/\sim$ es un poset con el orden definido por $\overline{a} \leq \overline{b}$ si $a \prec b$.

Ejercicio 3. Probar que un morfismo de orden entre posets que es una función biyectiva no necesariamente es un isomorfismo.

Ejercicio 4. Probar que en un reticulado todo conjunto finito no vacío tiene supremo e ínfimo.

Ejercicio 5. Sea $f : A \to B$ un isomorfismo de orden entre reticulados. Probar que $f(a \vee a') = f(a) \vee f(a')$ para cualesquiera $a, a' \in A$.

Ejercicio 6. Demostrar que si A es un conjunto de n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

Ejercicio 7. Probar que los siguientes conjuntos son numerables (es decir, tienen cardinal $\aleph_0$):

$$\mathbb{Z}_{\leq -1} \quad ; \quad \mathbb{Z}_{\geq -3} \quad ; \quad 3 \cdot \mathbb{N} \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad \mathbb{N}^2 \quad ; \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{N}^m \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Ejercicio 8.

i) Sean A y B conjuntos contables. Probar que $A \cup B$ es contable.

ii) Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos contables. Probar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es contable.

iii) Sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito y $\mathcal{S} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^m$. Probar que $\sharp(\mathcal{S}) = \aleph_0$.

Deducir que, cualquiera sea el alfabeto utilizado, hay más números reales que palabras para nombrarlos. ¿Cuántos subconjuntos de $\mathbb{N}^2$ pueden ser definidos en un lenguaje fijo? ¿Cuántos hay en total?

Ejercicio 9. Probar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es numerable.

Ejercicio 10. Se dice que un número complejo z es *algebraico* si existen enteros $a_0, \ldots, a_n$ no todos nulos, tales que

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0.$$

i) Demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable.

ii) Deducir que existen números reales que no son algebraicos.

NOTA: Estos números se llaman *trascendentes*.

Ejercicio 11. Sea $X \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ un conjunto de números reales positivos. Supongamos que existe una constante positiva C tal que para cualquier subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ vale $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq C$. Probar que X es contable.

Ejercicio 12. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que:

$$\sharp\big(\{x \in \mathbb{R} \ / \ f \text{ no es continua en } x\}\big) \leq \aleph_0.$$

Ejercicio 13. Probar que si A es un conjunto numerable, el conjunto de las partes finitas de A (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ formado por los subconjuntos finitos de A) es numerable.

Ejercicio 14. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos de sucesiones:

i) $\{(a_n) \ / \ a_n \in \mathbb{N} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.

ii) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} \ / \ a_n \leq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.

iii) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} \ / \ a_n \geq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.

iv) $\{(q_n) \subset \mathbb{Q} \ / \ \lim\limits_{n\to\infty} q_n = 0\}$.

v) $\{(q_n) \subset \mathbb{Q} \ / \ (q_n) \text{ es periódica}\}$.

vi) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} \ / \ 1 \leq a_n \leq m \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \qquad (m \in \mathbb{N})$.

Ejercicio 15. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos:

i) $\{I \ / \ I \text{ es un intervalo de extremos racionales}\}$.

ii) $\{[a, b] \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$.

iii) I, sabiendo que $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}$ es una familia de intervalos disjuntos dos a dos.

iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x + 2y \geq 7\}$.

v) $\mathbb{R}_{>0}$.

Ejercicio 16. Probar que una cadena infinita contiene o bien una cadena isomorfa (con el orden) a $\mathbb{N}$ o bien una cadena isomorfa a $\mathbb{Z}_{\leq -1}$.

Ejercicio 17. Sean A y B conjuntos disjuntos, A infinito y B numerable. Probar que:

i) Existe una biyección entre $A \cup B$ y A.

ii) Si A no es numerable y $B \subseteq A$, entonces existe una biyección entre $A - B$ y A.
¿Es numerable el conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$?

Ejercicio 18. Probar que existe una aplicación sobreyectiva $f : B \to A$ si y sólo si existe $g : A \to B$ inyectiva.

Ejercicio 19. Probar que la unión numerable de conjuntos de cardinal c tiene cardinal c.

Ejercicio 20. Sean a, b, c cardinales. Probar que:

i) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

ii) $a^{b+c} = a^b \cdot\ a^c$.

iii) $(a^b)^c = a^{bc}$.

iv) $(ab)^c = a^c \cdot\ b^c$.

v) Si $b \leq c$, entonces $a^b \leq a^c$ y $b^a \leq c^a$.

Ejercicio 21. Probar que $n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Ejercicio 22. Mostrar que $\mathbb{R}$ es unión disjunta de c conjuntos de cardinal c.

Ejercicio 23. Se consideran los siguientes conjuntos de funciones:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{F}(\mathbb{R}) & = & \{f \ / \ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}; \\ \mathcal{C}(\mathbb{R}) & = & \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \ / \ f \text{ es continua}\}; \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \mathcal{F}(\mathbb{Q}) & = & \{f \ / \ f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}\}; \\ \mathcal{C}(\mathbb{Q}) & = & \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}) \ / \ f \text{ es continua}\}. \end{array}$$

i) Probar que $\sharp(\mathcal{F}(\mathbb{R})) > c$.

ii) Calcular $\sharp(\mathcal{F}(\mathbb{Q}))$.

iii) Calcular $\sharp(\mathcal{C}(\mathbb{Q}))$.

iv) Probar que la función $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ dada por $\phi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ es inyectiva. ¿Qué significa esto?

v) Calcular $\sharp(\mathcal{C}(\mathbb{R}))$.

Ejercicio 24. Probar que el conjunto de partes numerables de $\mathbb{R}$ (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ formado por todos los subconjuntos numerables de $\mathbb{R}$) tiene cardinal c.

Aplicaciones del Lema de Zorn

Ejercicio 25. Sean $A, B \neq \emptyset$. Probar que o bien existe $f : A \to B$ inyectiva, o bien existe $g : B \to A$ inyectiva (es decir $\sharp A \leq \sharp B$ o $\sharp B \leq \sharp A$).

Ejercicio 26. Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ un subespacio. Sea $T\colon S \to \mathbb{R}$ una transformación lineal. Probar que T se puede extender a todo el espacio, es decir que existe $\widetilde{T}\colon V \to \mathbb{R}$ lineal tal que $\widetilde{T}|_S \equiv T$.

Ejercicio 27. Probar que todo conjunto linealmente independiente se puede extender a una base.

Ejercicio 28. Probar que de todo sistema de generadores se puede extraer una base.