Práctica 0: Repaso

Ejercicio 1. Mostrar que en un cuerpo totalmente ordenado arquimediano son equivalentes las afirmaciones siguientes (¿dónde se usa la arquimedianidad?):

1. toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente;
2. toda sucesión de Cauchy es convergente;
3. si $(I_n)_{n\geq 1}$ es un encaje de intervalos cerrados cuyas longitudes tienden a cero, entonces existe un único $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$;
4. todo conjunto acotado superiormente y no vacío tiene supremo;
5. toda sucesión monótona y acotada superiormente tiene supremo.

Ejercicio 2.

i) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x > 1$. Mostrar que existe un entero k tal que $x < k < y$.

ii) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Mostrar que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

iii) Sean $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $r > s$. Mostrar que existe un número irracional entre r y s.

iv) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Mostrar que existe un número irracional entre x e y.

Ejercicio 3. Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$, existe una sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ estrictamente decreciente tal que $q_n \geq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} q_n = x$.

Ejercicio 4. Sean $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ y $\varepsilon > 0$. Mostrar que existe $q = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{Q}^m$ tal que $\|x - q\| = \left(\sum_{i=1}^{m} (x_i - q_i)^2\right)^{1/2} < \varepsilon$.

Ejercicio 5. Sea $A = \left\{ \frac{m}{2^n} \Big/ m \in \mathbb{Z} \ , \ n \in \mathbb{N} \right\}$. Probar que A es denso en $\mathbb{R}$.
Analizar la misma situación para el conjunto $B = \left\{ \frac{m}{b^n} \Big/ m \in \mathbb{Z} \ , \ n \in \mathbb{N} \right\}$, donde $b \in \mathbb{R}_{>0}$.

Ejercicio 6. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que

i) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0,\ a_n \leq b_n \leq c_n$;

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$.

Probar que $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$.

Ejercicio 7. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales acotada.

i) Probar que $\alpha = \limsup a_n$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ se verifica:

   a) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq n_0$, $a_n < \alpha + \varepsilon$;

   b) $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, m \geq n$ tal que $a_m > \alpha - \varepsilon$.

ii) Demostrar que $\alpha = \limsup a_n$ si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

   a) Existe una subsucesión $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} = \alpha$;

   b) si $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente, entonces $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} \leq \alpha$.

Ejercicio 8. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ si y sólo si $\limsup a_n = \liminf a_n = \ell$.

Ejercicio 9. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones reales acotadas. Probar que:

i) $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$.

ii) $\limsup(a_n \cdot b_n) \leq \limsup a_n \cdot \limsup b_n$, si $a_n, b_n \geq 0$.

iii) Si $c > 0$ entonces, $\limsup(c \cdot a_n) = c \cdot \limsup a_n$.

Enunciar y probar resultados análogos para $\liminf$.

Ejercicio 10. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$.

i) Probar que: $\liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

ii) Deducir que si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = A \in \mathbb{R}_\infty$ entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$.

iii) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

iv) Sea

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{si } n = 2k-1, \\ \frac{1}{3^k} & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

Calcular los límites superiores e inferiores del ítem i) para esta sucesión. Decidir si los límites del ítem ii) existen y, de ser así, calcularlos.

v) Sea

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{si } n = 2k-1, \\ \frac{1}{4^{k-1}} & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

Calcular los límites superiores e inferiores del ítem i) para esta sucesión. Decidir si los límites del ítem ii) existen y, de ser así, calcularlos.

Ejercicio 11. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $(x_i)_{i\geq 0}, (y_j)_{j\geq 0}$ desarrollos de ambos en base $b > 1$. Se supone que el desarrollo de y es infinito, i.e., para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $i > n$ con $y_i > 0$.

i) Probar que si $x_i = y_i$ para todo $i \leq n-1$ y $x_n < y_n$, entonces $x < y$.

ii) Deducir que el orden entre x e y es el mismo que el de los primeros términos en que difieren sus desarrollos.

iii) Manteniendo las hipótesis de i), sea $z \in [x, y]$. Probar que entonces z tiene un desarrollo en base b con $z_i = x_i = y_i$ para todo $i \leq n-1$.

Ejercicio 12. Hallar el desarrollo en base 2, 3 y 16 de los números 2,25; 10,7; 27 y 255.

Ejercicio 13. Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos:

i) $B - \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B - A_i)$.

ii) $B - \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B - A_i)$.

iii) $\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) = B \cap \Big(\bigcup_{i \in I} A_i \Big)$.

Ejercicio 14. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Hallar una familia de conjuntos $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que verifique simultáneamente:

a) $B_n \subseteq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

b) $B_k \cap B_j = \emptyset$ si $k \neq j$;

c) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Ejercicio 15. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función y sean A y B subconjuntos de X.

i) Demostrar que:

   a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

   b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

ii) Generalizar al caso de uniones e intersecciones infinitas.

iii) Exhibir un ejemplo donde la inclusión en i) b) sea estricta.

Ejercicio 16. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Demostrar que:

i) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

ii) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

iii) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$.

iv) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

v) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Generalizar iv) y v) al caso de uniones e intersecciones infinitas.

Ejercicio 17. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que $f(f^{-1}(B)) = B$ para cada $B \subseteq Y$ si y sólo si f es suryectiva.

Ejercicio 18. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

1. f es inyectiva;
2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todos $A, B \subseteq X$;
3. $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subseteq X$;
4. $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ para todo par de subconjuntos A, B tales que $A \cap B = \emptyset$;
5. $f(A - B) = f(A) - f(B)$ para todo $B \subseteq A \subseteq X$.

Ejercicio 19. Para cada subconjunto S de un conjunto A dado se define la *función característica de* S, $\mathcal{X}_S : A \longrightarrow \{0, 1\}$, por

$$\mathcal{X}_S(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in S, \\ 0 & \text{si } a \notin S. \end{cases}$$

Probar que:

i) $\mathcal{X}_{S \cap T} = \mathcal{X}_S \cdot \mathcal{X}_T$ para todo par de subconjuntos $S, T \subseteq A$.

ii) $\mathcal{X}_{A-S} = 1 - \mathcal{X}_S$ para todo $S \subseteq A$.

iii) $\mathcal{X}_S \ + \ \mathcal{X}_T = \mathcal{X}_{S \cup T} \ + \ \mathcal{X}_{S \cap T}$ para todo par de subconjuntos $S, T \subseteq A$.