ANÁLISIS COMPLEJO

PRIMER CUATRIMESTRE 2025

PRÁCTICA 8

SUCESIONES DE FUNCIONES Y PRODUCTOS INFINITOS

Sea $\mathcal{H}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa}\}$ y recordemos que $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ si converge uniformemente sobre subconjuntos compactos del abierto Ω .

1. Probar que $(1 + \frac{z}{n})^n \rightarrow e^z$ en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.
2. Sea $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$, probar que $e^{f_n} \rightarrow e^f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$.
3. Sea $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$, probar que si $z_n \rightarrow z$ entonces $f_n(z_n) \rightarrow f(z)$,
4. Sea $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$, probar que f es nula o para todo complejo z tal que $f(z) = 0$ existe una sucesión convergente de complejos $z_n \rightarrow z$ con $f_n(z_n) = 0$ para n suficientemente grande.
5. Sea $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ con f nunca nula, probar que para todo compacto $K \subseteq \Omega$ existe n_0 con la propiedad que para todo entero $n > n_0$ la función f_n es nunca nula en K .
6. Sea $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ con f nunca nula, probar que $1/f_n \rightarrow 1/f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$.
7. Demostrar que dado $R > 0$ existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ vale que

$$P_n(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \dots + \frac{z^n}{(n+1)!}$$

no tiene ceros reales de módulo menor que R .

8. Dado un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, un subconjunto $\mathcal{A}$ de $\{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorfa}\}$ se dice acotado si para todo subconjunto compacto K de Ω se tiene que existe una constante M_K tal que

$$\|f\|_K := \max_{z \in K} |f(z)| \leq M_K \text{ para toda } f \in \mathcal{A}.$$

- a) Probar que si $\mathcal{A}$ consiste de una sucesión de funciones holomorfas que converge uniformemente sobre compactos entonces es un conjunto acotado.
 - b) Probar que si $\mathcal{A}$ es acotado, el conjunto de sus derivadas también es acotado.
 - c) Probar que si $\mathcal{A}$ es acotado entonces es equicontinuo y deducir que es normal, es decir que toda sucesión tiene una subsucesión convergente.
9. Probar que si un subconjunto de $\{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorfa}\}$ no es normal entonces la unión de las imágenes de todas las funciones es un subconjunto denso del plano complejo $\mathbb{C}$.

10. Demostrar que

$$\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}\right)^2 - \frac{1}{z^2} = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}$$

usando que ambos lados son funciones meromorfas que tienen los mismos polos, la misma parte singular, periodo 1 y la propiedad de que convergen a 0, uniformemente en $\operatorname{Re}(z)$, si $\operatorname{Im}(z) \rightarrow \infty$.

11. Demostrar que

$$\pi \cotg(\pi z) - \frac{1}{z} = \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

calculando via residuos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\pi \cotg(\pi w)}{w(w-z)} dw$$

donde C_n son cuadrados centrados en el origen y de lados de longitud igual a $(2n+1)\pi$.

12. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ meromorfa con a lo sumo polos simples y con la propiedad que existe una sucesión de números reales $\{r_n\}$ tal que la función f no tiene polos en $\{z : |z| = r_n\}$ y además vale que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\{|z|=r_n\}} |f(z)/z| = 0,$$

demostrar que

$$f(z) = f(0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right)$$

donde f tiene polos simples en la sucesión de números complejos $\{a_n\}$ con residuo A_n .

13. Probar que para todo z con $|z| < 1$ se tiene

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}.$$

14. Sea $f : \{z : |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n),$$

probar que es una función holomorfa y calcular sus ceros y multiplicidades.

15. Sea $f : \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z - 1}{n^2 z + 1},$$

probar que es una función holomorfa y calcular sus ceros y multiplicidades.

16. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{z}{2^n}\right),$$

probar que es una función holomorfa y calcular sus ceros y multiplicidades.

17. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

probar que es una función holomorfa y calcular sus ceros y multiplicidades.

18. Construcción de funciones holomorfas con ceros prefijados en la bola unidad.

a) Sean $a, z \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$ tales que $0 < |a| < 1$ y $|z| \leq r < 1$. Probar que

$$\left| \frac{a + |a|z}{(1 - \bar{a}z)a} \right| \leq \frac{1}{1 - r}.$$

b) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una sucesión tal que $0 < |a_n| < 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$. Probar que

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}$$

define una función holomorfa en $B(0, 1)$ y que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in B(0, 1)$.

c) ¿Cuáles son los ceros de la función f definida en el ítem b)?

19. Demostrar que existe una función $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa que no se extiende de manera holomorfa a ningún abierto conexo que contenga a la bola $B(0, 1)$ propiamente.

20. Probar que

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

21. Probar que la función zeta de Riemann admite la representación

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \quad \text{en el abierto } \{\operatorname{Re}(z) > 1\},$$

donde $(p_k)_k$ es la enumeración usual de los primos positivos.