Análisis Complejo

Primer Cuatrimestre 2025

Práctica 6

Series de Laurent y Singularidades

1. Hallar los desarrollos en serie de Laurent para $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ en los anillos

   a) $0 < |z| < 1$,
   b) $1 < |z| < 2$,
   c) $2 < |z|$,
   d) $0 < |z-1| < 1$,
   e) $1 < |z-1|$,
   f) $1 < |z-2| < 2$.

2. Hallar el coeficiente de z en el desarrollo de Laurent de $\dfrac{e^z}{z-1}$ en $\{|z| > 1\}$.

3. Dado λ en $\mathbb{C}$, probar que se tiene

$$e^{\frac{1}{2}\lambda\left(z+\frac{1}{z}\right)} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \text{ con } a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda\cos(t)}\cos(nt)\,dt$$

   para todo z en $\mathbb{C}^{\times}$.

4. Determinar qué tipo de singularidad tiene cada una de las siguientes funciones en el origen, cuando sea evitable, extender la función ded forma holomorfa y cuando sea un polo determinar su orden y hallar su parte singular.

   a) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$,
   b) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$,
   c) $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z}$,
   d) $f(z) = \frac{1}{z}\cos\left(\frac{1}{z}\right)$.
   e) $f(z) = \frac{z^2+1}{z(z+1)}$,
   f) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$.

5. ¿Es 0 una singularidad esencial de la función que define la siguiente serie de Laurent?

$$\cdots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \cdots$$

6. Si $f : \mathbb{C} \setminus \{i, 2i\} \to \mathbb{C}$ es holomorfa con singularidades no evitables en i y $2i$, demostrar que entonces su desarrollo en serie de Laurent en $\{1 < |z| < 2\}$ tiene infinitos términos negativos e infinitos términos positivos no nulos.

7. Sean f y g holomorfas en un entorno reducido de $z_0 \in \mathbb{C}$.

   a) Probar que z_0 es un cero de orden k de f si y solo si z_0 es un polo de orden k de $1/f$.

   b) Si z_0 es un cero (polo) de orden k de f y también un cero (polo) de orden k de g, ¿qué clase de singularidad tiene f/g en z_0?

   c) Si z_0 es una singularidad esencial de f y un polo de g, decidir que tipo de singularidad tienen las funciones fg y f/g en z_0.

8. Sea z_0 una singularidad evitable, un polo o una singularidad esencial de la función f. Determinar en cada caso qué tipo de singularidad tiene la función e^f en z_0.

9. Decidir qué tipo de singularidad tiene en ∞ la función racional

$$f(z) = \frac{a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0}$$

dependiendo de los grados del numerador y el denominador.

10. Clasificar las singularidades de las siguientes funciones en $\widehat{\mathbb{C}}$ y determinar el orden de cada polo.

a) $f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$,
c) $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z^2}\right)^{-1}$,
e) $f(z) = \frac{\cos(z) - \operatorname{sen}(z)}{z^4 + 2z^2 + 1}$,
b) $f(z) = \cos(z) e^{-\frac{1}{z^2}}$,
d) $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$,
f) $f(z) = \frac{1}{\cos(z) - 1}$.

11. Probar que una función entera
    a) tiene una singularidad evitable en ∞ si y solo si es constante,
    b) tiene un polo de orden n en ∞ si y solo si es un polinomio de grado n.
    c) es biyectiva si y sólo si es una lineal.

12. Sea $f(z)$ con un polo de orden m en z_0, probar que

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(m-1)}(z) \quad \text{donde} \quad g(z) = (z - z_0)^m f(z).$$

13. Sean f meromorfa y g holomorfa. Probar que:
    a) si a es un polo simple de f, $\operatorname{Res}(fg, a) = \operatorname{Res}(f, a) g(a)$;
    b) si a es un cero de orden m de f, a es un polo simple de f'/f y $\operatorname{Res}(f'/f, a) = m$;
    c) si a es un polo de orden m de f, a es un polo simple de f'/f y $\operatorname{Res}(f'/f, a) = -m$;

14. Calcular los residuos de la siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)z}$ en 0 y 1,
c) $f(z) = \frac{z^4 e^z}{1 + e^z}$ en πi.
e) $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}$ en ∞
b) $f(z) = \frac{\cos(z) - 1}{\operatorname{sen}(z) - z}$ en 0,
d) $f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z}$ en ∞
f) $f(z) = \frac{e^{1/z}}{(1+z)z}$ en ∞

15. Calcular los residuos de f en cada una de sus singularidades aisladas siendo:

a) $f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$,
b) $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^3}$,
c) $f(z) = z^5 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$.