Práctica 9

En lo que sigue $\mathcal{M}$ será la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}$ y μ la medida de Lebesgue. Además, E denotará a un subconjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$.

1. Sea f una función simple. Pruebe que $|f|$ es simple.

2. Pruebe que dada una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X y dada $f : X \to \mathbb{R}$, son equivalentes:

(a) $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
(b) $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
(c) $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
(d) $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Concluya que si $X \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, entonces f es medible si y solo si vale alguno de (y por lo tanto, todos) los ítems de arriba.

3. Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$. Pruebe que:

(a) Si f es medible entonces $\{x \in E : f(x) = a\} \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
(b) Si f y g son medibles entonces $\{x \in E : f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{M}$.
(c) Si f es medible y $f(x) = g(x)$ para casi todo $x \in E$, entonces g es medible.

4. Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Pruebe que:

(a) $f + g$ es medible.
(b) αf es medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
(c) f^2 es medible.
(d) $f \cdot g$ es medible.
Sugerencia: $f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{2}$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona. Pruebe que f es medible.

6. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función. Pruebe que:

(a) Si f es continua en $[0, 1]$, entonces es medible.
(b) Si f es continua en casi todo punto de $[0, 1]$ (esto es, si su conjunto de discontinuidades es nulo), entonces es medible.

7. Dada una sucesión $(f_n)_n$ de funciones en E, consideremos las funciones

$$S(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \qquad \text{y} \qquad I(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Pruebe que si las funciones f_n son medibles, entonces S e I también lo son.

8. Dada $(f_n)_n$ una sucesión de funciones medibles y no negativas con $f_n : E \to \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Pruebe que f es medible, y que

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

9. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible, no negativa e integrable. Pruebe que si $A \in \mathcal{M}$, entonces

$$\int_A f(x+y)\, d\mu(x) = \int_{A+y} f(x)\, d\mu(x)$$

para todo $y \in \mathbb{R}$ tal que $A + y \subseteq E$.

10. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Supongamos que E tiene medida finita. Pruebe que f es integrable.

11. Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles e integrables tales que para todo $A \subseteq E$ medible se tiene que $\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu$. Pruebe que $f = g$ en casi todo punto de E.

12. Sea $E = [0, +\infty)$. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : E \to \mathbb{R}$ dada por $f_n = (-1/n)\chi_{[0,n]}$. Pruebe que la sucesión $(f_n)_n$ converge uniformemente a la función nula en E. Pruebe que, sin embargo $\int_E f_n \, d\mu = -1$, de manera que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = -1 < 0 = \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Deduzca que el lema de Fatou no vale si las funciones f_n no son no negativas, aún cuando converjan uniformemente.

13. Sean $f : E \to \mathbb{R}$ una función integrable y $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos medibles de E tales que $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Pruebe que:

(a) Si los E_n son disjuntos dos a dos entonces

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu.$$

(b) Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \, d\mu = \int_E f \, d\mu \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{E\setminus E_n} f \, d\mu = 0.$$

14. Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrable. Pruebe que para todo $x > 0$ la función $F_x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $F_x(t) = f(t)\, e^{-xt}$ es integrable, y que la función

$$g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \int_{(0,+\infty)} f(t)\, e^{-xt}\, dt$$

es continua.