Práctica 3

1. Pruebe que los siguientes son espacios métricos. Dibuje, en cada caso, una bola abierta.

(a) $\mathbb{R}$ con $d(x,y) = |x-y|$.

(b) $\mathbb{R}^n$ con $d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$.

(c) $\mathbb{R}^n$ con $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

(d) $\mathbb{R}^n$ con $d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

(e) $C([0,1])$ con $d_\infty(f,g) = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|$.

(f) E un conjunto no vacío, con la métrica

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

2. Decida cuáles de las siguiente funciones definidas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son métricas en $\mathbb{R}$:

(a) $d(x,y) = (x-y)^2$, (b) $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$, (c) $d(x,y) = |x^2 - y^2|$.

3. Halle interior y clausura de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determine cuáles son abiertos o cerrados.

(a) $[0,1]$ (c) $\mathbb{Q}$ (e) $\mathbb{Z}$ (g) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(b) $(0,1)$ (d) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ (f) $[0,1) \cup \{2\}$ (h) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$

4. Sea (E,d) un espacio métrico. Sean $x \in E$ y $r > 0$.

(a) Pruebe que $\{x\}$ es un conjunto cerrado.

(b) Pruebe que $B(x,r)$ es un conjunto abierto.

(c) Pruebe que si $r > r' > 0$ entonces $\overline{B(x,r')} \subseteq B(x,r)$.

(d) Pruebe que $\overline{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}$ es un conjunto cerrado.

(e) Deduzca que $\overline{B(x,r)} \subseteq \overline{B}(x,r)$.

(f) Dé un ejemplo en que $\overline{B(x,r)}$ sea un subconjunto propio de $\overline{B}(x,r)$.

(g) Pruebe que $\{y \in E : \ 2 < d(y,x) < 3\}$ es un conjunto abierto.

5. Sea E un espacio métrico y sea $A \subseteq E$. Pruebe que:

(a) $E \setminus A^\circ = \overline{E \setminus A}$.

(b) $E \setminus \overline{A} = (E \setminus A)^\circ$.

¿Son ciertas las igualdades $\overline{A} = \overline{A^\circ}$ y $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

6. Sea E un espacio métrico y sean $A, B \subseteq E$. Pruebe que:

(a) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
(b) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.
(c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(d) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Encuentre ejemplos en que no valga la igualdad en (b) y (d).

7. Sean E un espacio métrico y $A, B \subseteq E$ subconjuntos acotados de E.

(a) Pruebe que si $A \subseteq B$ entonces $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$.
(b) Pruebe que $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$.

8. Halle frontera y puntos de acumulación de cada uno de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ del Ejercicio 3.

9. Sea E un espacio métrico y sea $A \subseteq E$.

(a) Pruebe que $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$, y concluya que ∂A es cerrado.
(b) Pruebe que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$, y concluir que $\partial A = \partial(E \setminus A)$.

10. Sea (E, d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq E$ no vacío y $x \in E$, se define la *distancia* de x a A como

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Pruebe que para todos $x, y \in E$ y $r > 0$:

(a) $\big|d(x, A) - d(y, A)\big| \leq d(x, y)$.
(b) $x \in A \implies d(x, A) = 0$.
(c) $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.
(d) $B_A(r) = \{x \in E : d(x, A) < r\}$ es abierto.
(e) $\overline{B}_A(r) = \{x \in E : d(x, A) \leq r\}$ es cerrado.

11. Sea (E, d) un espacio métrico. Consideremos el conjunto $\mathcal{X} = \{A \subseteq E : A \neq \emptyset\}$. Definimos la función $\widehat{d} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ como

$$\widehat{d}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A \ , \ b \in B\}.$$

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) $\widehat{d}(A, B) = \widehat{d}\left(\overline{A}, B\right)$.
(b) $\widehat{d}(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$.
(c) $\widehat{d}(A, B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.
(d) $\widehat{d}(A, B) \leq \widehat{d}(A, C) + \widehat{d}(C, B)$.

Concluya que $\widehat{d}$ no es una distancia.

12. Considere en $\mathbb{R}^n$ las distancias d_1, d_2 y d_∞.

(a) Pruebe que estas tres distancias son equivalentes; más aún, pruebe que

$$d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n d_\infty(x,y).$$

(b) Denotemos por $B_1(x,r)$, $B_2(x,r)$ y $B_\infty(x,r)$ a la bola de centro x y radio r para cada una de las distancias, respectivamente. Deduzca de (a) que

$$B_1(x,r) \subseteq B_2(x,r) \subseteq B_\infty(x,r) \subseteq B_1(x,nr).$$

Compare estas contenciones con los dibujos hechos en el Ejercicio 1.

13. Sea (E,d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en E.

(a) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, pruebe que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y)$.

(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en E, pruebe que la sucesión de números reales $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

14. Pruebe que $(\mathbb{R}^n, d_1)$, $(\mathbb{R}^n, d_2)$ y $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ son completos.

15. Sea (E,d) un espacio métrico completo y $A \subseteq E$ un subconjunto de E. Pruebe que si A es cerrado entonces el espacio métrico (A,d) es completo.

16. *Teorema de la intersección (Cantor).* Sea E un espacio métrico completo. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados, acotados y no vacíos de E tales que

- $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \geq 1$.
- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$.

Pruebe que existe un único elemento $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
