Práctica 2

Recuerde: Dadas $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y dados $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$, se tiene

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(e) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Si f es inyectiva vale la igualdad.

(f) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$. Si f es sobreyectiva vale la igualdad.

(g) $X \setminus f^{-1}(D) = f^{-1}(Y \setminus D)$.

(h) Si f y g son inyectivas (respectivamente: sobreyectivas, biyectivas), entonces $g \circ f$ es inyectiva (respectivamente: sobreyectiva, biyectiva).

---

1. Halle el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $\mathbb{Z}_{\leq -3}$ (b) $5\,\mathbb{Z}$ (c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ (d) $(-1, 1) \cap \mathbb{Q}$

2. Sea A y B conjuntos contables. Pruebe que $A \cup B$ es contable.

3. Sean $A \subseteq B$ conjuntos tales que A es contable y $B \setminus A$ es infinito.

(a) Pruebe que existe $C \subseteq B \setminus A$ tal que $C \sim C \cup A$.

(b) Deduzca que $B \setminus A \sim B$.

4. Halle el cardinal del conjunto de los números irracionales.

5. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(a) Encuentre una sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos dos a dos tales que:

- $B_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y
- $\bigcup_{n\leq m} B_n = \bigcup_{n\leq m} A_n$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

(b) Pruebe que para toda sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como arriba se tiene que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

6. (a) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos contables. Pruebe que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es contable.

(b) Sea A un conjunto finito y no vacío y $S = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A^m$. Pruebe que $\#S = \aleph_0$.

Deduzca que, dado un alfabeto (esto es, un conjunto de símbolos) finito, hay más números reales que palabras (esto es, sucesiones finitas de símbolos) definibles con ese alfabeto para nombrarlos.

7. Sea c el cardinal de $\mathbb{R}$. Pruebe las siguientes afirmaciones:

(a) Si $\#A = c$ y $\#B = c$, entonces $\#(A \cup B) = c$.

(b) Si $\#A_n = c\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = c$.

8. Sea A un conjunto.

(a) Pruebe que $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$.

(b) Concluya que si $\#A = n$ entonces $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$.

9. Sean A y B conjuntos. Pruebe que:

(a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

(b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(c) $A \sim B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

10. (a) Pruebe que $[0,1) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Sugerencia: considere el desarrollo binario de los números del intervalo $[0,1)$. ¡Ojo!, dicho desarrollo no es único.

(b) Concluya que $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = c$.

11. Pruebe que si A es numerable entonces $\mathcal{P}_f(A) = \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\}$ es numerable.

12. (a) Pruebe que el conjunto de números primos es numerable.

(b) Escriba a $\mathbb{N}$ como unión numerable de conjuntos numerables disjuntos dos a dos.

13. Calcule el cardinal del conjunto $\{B \subseteq \mathbb{N} : \#B = \#(\mathbb{N} \setminus B) = \aleph_0\}$.

14. (a) Calcule el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(b) Calcule el cardinal de $[0,1) \times [0,1)$.

(c) Calcule el cardinal de $\mathbb{R}^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

15. Calcule el cardinal de $\mathbb{R}[X]$, esto es, el conjunto formado por todos los polinomios con coeficientes reales.

16. Calcule el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$.

(b) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es periódica}\}$.

17. (a) Sea I un conjunto (de índices). Supongamos que existe una familia de intervalos $\{A_i\}_{i\in I}$ indexada por I tal que

- $\#A_i > 1$ para todo $i \in I$.
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Pruebe que I es contable.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona. Pruebe que el conjunto de sus discontinuidades es contable.
