Práctica 1

1. Pruebe que si $x < y + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x \leq y$. Deduzca que si $|x - y| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = y$.

2. (a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x > 1$. Pruebe que existe un entero entre x e y.

(b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Pruebe que existe un racional entre x e y.

(c) Sean $x, y \in \mathbb{Q}$ tales que $x < y$. Pruebe que existe un irracional entre x e y.

(d) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Pruebe que existe un irracional entre x e y.

3. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Pruebe la siguiente equivalencia:

$$i = \inf A \iff \begin{cases} i \leq a \text{ para todo } a \in A, \\ \text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } a \in A \text{ tal que } i \leq a < i + \varepsilon. \end{cases}$$

4. Halle, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, y pruebe que lo son:

(a) $(a, b]$

(b) $B = \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(c) $B \cup \{0\}$

(d) $\left\{x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R}\right\}$

5. Sean $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$. Pruebe las siguientes afirmaciones:

(a) Si B está acotado superiormente, entonces A también lo está, y $\sup A \leq \sup B$.

(b) Si B está acotado inferiormente, entonces A también lo está, e $\inf B \leq \inf A$.

(c) Si A no está acotado, entonces B tampoco lo está.

6. Dados un conjunto de números reales A y $c \in \mathbb{R}$, denotamos $cA = \{ca : a \in A\}$. Más aun, $-A$ denotará al conjunto $(-1)A$. Pruebe las siguientes afirmaciones:

(a) Si A está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente e $\inf(-A) = -\sup A$.

(b) Si $c > 0$ y A está acotado superiormente, entonces cA está acotado superiormente y $\sup(cA) = c \sup(A)$.

7. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ creciente. Supongamos que $f(a) > a$. Sea

$$x_0 = \sup\left(\{x \in [a, b] : f(x) > x\}\right).$$

Pruebe que $f(x_0) = x_0$.

8. Pruebe, usando la definición de límite:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-2n}{n+1} = -2.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-3}{2^n+4} = 1.$

9. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ e $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_2$.

Pruebe que si $x_n \leq y_n$ para todo n, entonces $\ell_1 \leq \ell_2$.

10. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de números reales tales que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, pruebe que $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

11. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ decreciente. Pruebe que:

(a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada inferiormente, entonces tiene límite y

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no acotada inferiormente, entonces $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

12. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente y no vacío. Pruebe que si A no tiene máximo entonces existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ estrictamente creciente tal que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup(A)$.

13. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión no acotada superiormente. Pruebe que existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que diverge a $+\infty$.

14. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y $\ell \in \mathbb{R}$.

Pruebe que si toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una (sub)subsucesión $\left(x_{n_{k_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ que converge a ℓ, entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.

15. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Pruebe:

(a) Si $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ son convergentes, y sus límites coinciden, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

(b) Si $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ son convergentes, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.