
ANÁLISIS II – ANÁLISIS MATEMÁTICO II – MATEMÁTICA 3

Primer Cuatrimestre 2025

Práctica 2: Integrales de superficie.

Ejercicio 1. Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas y graficar

- (a) $r = k$ ($k = cte$). (b) $\varphi = k$, $k \in (0, \pi/2]$ constante.

En cada uno de los casos anteriores dé un vector normal en cada punto.

Ejercicio 2.

- (a) Mostrar que $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\begin{aligned}\Phi_1(u, v) &= \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right), \text{ con } a, b \text{ no nulos,} \\ \Phi_2(u, v) &= (au \cos(v), bu \sin(v), u^2),\end{aligned}$$

son dos parametrizaciones del **paraboloide elíptico**.

- (b) Mostrar que

$$\Phi(u, v) = ((a + b \cos(u)) \sin(v), (a + b \cos(u)) \cos(v), b \sin(u))$$

con $0 < b < a$, y $u, v \in [0, 2\pi]$, es una parametrización del **toro** (ver el ejercicio de las superficies de revolución al final de esta práctica).

Ejercicio 3. Considerar la superficie dada por la parametrización:

$$x = u \cos(v), \quad y = u \sin(v), \quad z = u.$$

¿Es diferenciable esta parametrización? ¿Es suave la superficie?

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{C}$ la curva en el plano xy dada en polares por:

$$r = 2 - \cos \theta \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

Sea S la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje y .

- (a) Dar una parametrización de S . (b) ¿Es suave esta superficie?

Ejercicio 5. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera de radio a y centro en el origen en un punto (x_0, y_0, z_0) genérico de la esfera.

Ejercicio 6. Encontrar una ecuación para el plano tangente en el punto $(0,1,1)$ a la superficie dada por la parametrización

$$x = 2u, \quad y = u^2 + v, \quad z = v^2.$$

Ejercicio 7. Sea $\phi(r, \theta) : [0, 1] \times [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = \theta,$$

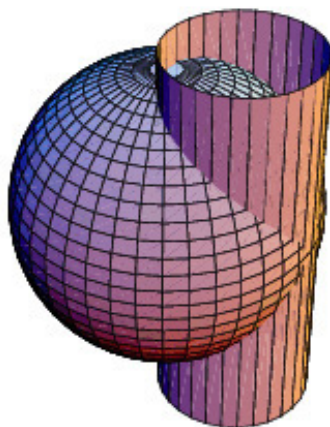
la parametrización de una superficie $\mathcal{S}$. Graficar $\mathcal{S}$, hallar un vector normal en cada punto y hallar su área.

Ejercicio 8. Sea $\phi(u, v) : D \mapsto \mathbb{R}^3$ (D el disco unitario centrado en el origen)

$$\phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$$

la parametrización de una superficie. Calcular su área.

Ejercicio 9. Calcular el área de la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con $(x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$. Esta superficie se conoce como *bóveda de Viviani*.



Ejercicio 10. Si tenemos una curva en el plano xz dada por $\{(x, 0, f(x)) : x \in [\alpha, \beta]\}$ con α positivo, y consideramos la superficie de revolución alrededor del eje z , muestre que el área de esta superficie es

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) ítem a) para calcular el área del paraboloide elíptico con $1 \leq z \leq 2$, y $a = b = 1$.

Ejercicio 11. Sea $\mathcal{C}$ la curva dada por

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos^3 \theta \\ y(\theta) = \sin^3 \theta \end{cases}$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ en el plano xy . Sea S la superficie que se obtiene al girar la curva $\mathcal{C}$ alrededor del eje x

- (a) Hallar una parametrización de S .
- (b) Hallar el área de S .

Ejercicio 12. Calcular $\iint_S xy \, dS$ donde S es el borde del tetraedro con lados $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$ y $x = y$.

Ejercicio 13. Calcular $\iint_S (x + y + z) dS$ donde

- (a) S es el borde de la bola unitaria, es decir $S = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
- (b) S es la parte superior de la esfera unitaria: $S = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$.

Ejercicio 14. Hallar la masa de una superficie esférica de radio r tal que en cada punto $(x, y, z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia entre (x, y, z) y el punto $(0, 0, r)$.

Recordamos que una superficie S es orientable si hay una forma de elegir en cada punto P de S un único versor normal $\nu(P)$ de modo que la función vectorial que esta elección define sobre S resulte continua.

Por ejemplo, si $\mathcal{S}$ es un gráfico, $\mathcal{S} = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2\}$, se puede elegir en todos los puntos un versor normal que apunte hacia arriba (es decir, con componente z positiva). Esta elección es continua en $\mathcal{S}$.

Si $\mathcal{S}$ es el borde de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de tipos I, II o III, se puede elegir como $\nu(P)$ la normal que apunta hacia afuera de Ω .

Recordamos que una superficie con una parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{S} = \text{Im}(T)$, verifica que para cada $P \in \mathcal{S}$, $P = T(u_0, v_0)$, $T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0) \neq 0$. En ese caso,

$$\nu(P) = \frac{T_u(u, v) \times T_v(u, v)}{\|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\|}, \quad \text{donde } (u, v) \text{ es tal que } P = T(u, v).$$

es un versor normal que orienta la superficie $\mathcal{S}$. Con esa elección de orientación decimos que $\mathcal{S}$ está orientada por la parametrización T .

Recordamos que si $\mathcal{S}$ es una superficie suave orientada con parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\vec{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{S}$, entonces el flujo de $\vec{F}$ a través de $\mathcal{S}$ se define como

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{S} &:= \iint_D \langle \vec{F}(T(u, v)), T_u \times T_v \rangle \, dudv \\ &= \iint_D \langle \vec{F}(T(u, v)), \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} \rangle \|T_u \times T_v\| \, dudv \\ &= \iint_D \langle \vec{F}(T(u, v)), \nu(T(u, v)) \rangle \|T_u \times T_v\| \, dudv = \iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \nu \, dS \end{aligned}$$

Ejercicio 15. Demuestre la siguiente propiedad: 'Si $\mathcal{S}$ es una superficie suave orientada con parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $T_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra parametrización de T con misma orientación, entonces para todo $\vec{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{S}$, el cálculo de $\int_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ da el mismo resultado cuando se utiliza la parametrización T o la parametrización T_1 . Si T_1 invierte la orientación, los cálculos difieren en el signo.'

Ejercicio 16. Evaluar el flujo saliente del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Ejercicio 17. Si la temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ está dada por la función $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$, calcular el flujo de calor (es decir el flujo del campo $-\nabla T$) a través de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, orientada de forma que la normal en el punto $(0, 0, \sqrt{2})$ sea $(0, 0, 1)$.

Ejercicio 18. Sea S la superficie de la esfera unitaria orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial y F_r su componente radial. Probar que

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_r \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta$$

Ejercicio 19. Sea S la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con z entre 1 y 2 orientada con la normal apuntando hacia el exterior del cono. Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ con $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

Ejercicio 20. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (ax, bx^2, cyx^2)$ que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo, a, b, c constantes). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano xy a través del cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ (las coordenadas x e y medidas en metros).

Ejercicio 21. (Superficies de revolución) Dada una curva en el plano yz :

$$\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$\text{Im}(\sigma) \subset \text{plano } yz$:

$$\sigma(t) = (0, y(t), z(t))$$

supongamos que σ es una parametrización regular y que $y(t) > 0 \forall t \in [a, b]$.

1. Muestre que la superficie de revolución alrededor del eje z se puede parametrizar por

$$T : [a, b] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(\theta, t) = (y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t))$$

y que es una superficie regular (con la propiedad adicional $T_\theta \perp T_t$).

2. Si σ parametriza un segmento, entonces la superficie es o bien un cilindro o bien un sector de un cono. Haga un dibujo de un cono de cierta altura y cierto radio y calcule su área en función de esos parámetros.
3. Si σ es un círculo entonces la superficie es un toro (volver a mirar desde este punto de vista la parametrización del toro dada en el ejercicio 2 (b)).
4. La parametrización de la superficie de una esfera es un ejemplo de esta construcción, donde σ es un semicírculo.

Ejercicio 22. Con la notación del ejercicio anterior, calcule $T_\theta \times T_t$ y su norma, y de una fórmula integral general del área de una superficie de revolución en función de los datos de la curva $\sigma(t)$.

Ejercicio 23. Considerar la superficie dada en forma paramétrica por

$$\begin{cases} x = \cos(\theta)(2 + t \cos(\frac{\theta}{2})) \\ y = \sin(\theta)(2 + t \cos(\frac{\theta}{2})) \\ z = t \sin(\frac{\theta}{2}) \end{cases}$$

Probar que la superficie obtenida es suave (gráfiguela por ejemplo en geogebra). Observar que se trata de la cinta de Moebius, que no es orientable (observe que para cada θ fijo, variando t se parametriza un segmento, contenido en un plano vertical apuntando en la dirección del ángulo θ , que va variando de inclinación a la "mitad de velocidad de θ "). En esta superficie está definida la integral de campos escalares (por ejemplo su cálculo de área) pero no está definido el cálculo de flujo de un campo a través de ella.