Álgebra Lineal Computacional - Clase Práctica 7 - Autovectores, autovalores y diagonalización

Fausto Martínez

9 de Mayo de 2025

Este documento es para acompañar la clase práctica de autovalores y diagonalización, enunciando los teoremas y proposiciones necesarios para resolver algunos ejercicios.

Definición

Dada una matriz cuadrada $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se dice que un vector no nulo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ es un *autovector* de $\boldsymbol{A}$ si existe algún $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

y, en tal caso, se llama a λ un *autovalor* de $\boldsymbol{A}$.

Para hallar los autovectores y autovalores de una matriz, partimos de imponer la condición buscada, es decir

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

o lo que es equivalente

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - \lambda \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\,.$$

Lo obtenido arriba es un sistema de ecuaciones, y por toda la teoría que desarrollamos en la materia, sabemos que si su determinante es distinto de cero, tiene una única solución, y en particular, que es la trivial, es decir $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Recordando la definición de recién, lo que estamos buscando son vectores **no nulos** que la cumplan. Por lo tanto, para que existan estos, debe ser que el sistema homogéneo tenga soluciones no triviales, y sabemos que esto ocurre si y solo si

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

Definición

Dada una matriz cuadrada $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, llamamos *polinomio característico* a

$$\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$$

Por lo dicho antes, los autovalores de $\boldsymbol{A}$ son las raíces del polinomio característico $\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$. El polinomio $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ es un polinomio mónico que tiene las mismas raíces que el polinomio $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$, y llamamos indistintamente polinomio característico a cualquiera de estos dos polinomios.

Una vez hallados los autovalores, podemos hallar los autovectores asociados a cada autovalor precisamente volviendo al sistema original, como los $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ tales que

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = 0$$

Es decir, que dado un autovalor λ_i, sus autovectores asociados son el espacio

$$E_{\lambda_i} = \ker(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})$$

Ejercicio 1

Hallar los autovalores y autovectores de la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Como mencionamos recién, comenzamos buscando los autovalores, para lo cual queremos hallar las raíces del polinomio característico. El mismo es

$$\begin{aligned}
\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) &= \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \\
&= \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda - 2)(\lambda - 1) - 6 \\
&= \lambda^2 - 3\lambda - 4 \\
&= (\lambda - 4)(\lambda + 1)
\end{aligned}$$

Con lo que tenemos que los autovalores del polinomio $\boldsymbol{A}$ son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -1$.

Ahora, hallemos los autovectores asociados al primer autovalor $\lambda_1 = 4$. Para esto, como vimos antes, buscamos el núcleo de $\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Planteamos entonces para $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, el sistema $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 + F_1]{} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Haciendo eliminación gaussiana, llegamos a que se nos anuló una fila, por lo que la única ecuación que sobrevive es $-2v_1 + 3v_2 = 0$, es decir que el espacio de autovectores asociado al autovalor $\lambda_1 = 4$ es

$$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Observación

Si recuerdan, lo primero que pedimos, fue que el determinante de esta matriz sea 0, con lo que si al hacer ese último proceso, alguna fila no se anula, quiere decir que algo mal hubo en el medio.

Repitiendo el proceso para hallar los autovectores asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$, tenemos que queremos hallar el núcleo de $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, y con eliminación gaussiana sobrevive solo $3v_1 + 3v_2 = 0$, con lo que tenemos

$$E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Aprovecho el último ejercicio para hacer una observación. Como notamos recién, el pedir que $\det(\lambda \boldsymbol{I} - A) = 0$, implica que en el proceso de encontrar autovectores, siempre hay una fila que se va a anular en $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}$ (o $\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$, es lo mismo). Entonces, podemos decir lo siguiente:

Proposición

Si λ es un autovalor de $\boldsymbol{A}$, su espacio de autovectores asociado, es decir

$$E_\lambda = \ker(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$$

tiene dimensión mayor o igual a 1.

También, es importante notar que, en la jerga, se suele decir informalmente que, en el caso de que el espacio de autovectores de λ tenga dimensión 1, entonces "λ tiene un único autovector". Por ejemplo, en el ejercicio de recién, diríamos que "a cada autovalor le corresponde un único autovector".

Ejercicio 2

Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Hallar sus autovalores y autovectores para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Solución: Nuevamente, comenzamos el ejercicio buscando el polinomio característico, que en este caso es

$$\begin{aligned}
\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -3 \\ 0 & 3 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda - 2) \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ 3 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda - 2) \left[(\lambda - 1)^2 - 9 \right]
\end{aligned}$$

Con lo que los autovalores de la matriz son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 + 3i$, $\lambda_3 = 1 - 3i$. Busquemos ahora los autovectores

Autovectores de $\lambda_1 = 2$

Recordando que tenemos que plantear $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$, tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 3F_2]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

de donde se deduce $v_3 = 0$ y $v_2 = 0$. Con lo que el espacio de autovectores es

$$E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Autovalores de $\lambda_2 = 1 + 3i$

Esta vez hay que plantear $\begin{pmatrix} 1-3i & 0 & 0 \\ 0 & -3i & 3 \\ 0 & -3 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, y entonces,

$$\begin{pmatrix} 1-3i & 0 & 0 \\ 0 & -3i & 3 \\ 0 & -3 & -3i \end{pmatrix} \xrightarrow[iF_3-F_2]{} \begin{pmatrix} 1-3i & 0 & 0 \\ 0 & -3i & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde podemos sacar que $v_1 = 0$, $v_3 = iv_2$, es decir que:

$$E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$$

<u>Autovalores de $\lambda_3 = 1-3i$</u>

Similarmente, para el tercer caso tenemos el sistema $\begin{pmatrix} 1+3i & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 3 \\ 0 & -3 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} 1+3i & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 3 \\ 0 & -3 & 3i \end{pmatrix} \xrightarrow[iF_3+F_2]{} \begin{pmatrix} 1-3i & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde ahora tenemos $v_1 = 0$, $v_3 = -iv_2$, entonces

$$E_{\lambda_3} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Resumiendo un poco, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ resulta que hay un solo autovalor y un solo autovector, $\lambda_1 = 2$ con su espacio de autovectores $E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, hay tres autovalores $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1+3i, \lambda_3 = 1-3i$, con espacios de autovalores $E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$, $E_{\lambda_3} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, respectivamente.

Proposición

Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ una matriz cuadrada tal que existe una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ formada por sus autovectores, con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. La matriz $\boldsymbol{A}$ en base $\mathcal{BB}$ es diagonal, y en particular es

$$\boldsymbol{A}_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Recordando un poco de cambio de base, teníamos que la matriz para modificar a un vector de la base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ a la canónica $\mathcal{E}$ era $C_{\mathcal{BE}} = \begin{pmatrix} | & \ldots & | \\ \boldsymbol{w}_1 & \ldots & \boldsymbol{w}_n \\ | & \ldots & | \end{pmatrix}$ y la matriz de cambio de base de la canónica $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$ era $C_{\mathcal{EB}} = C_{\mathcal{BE}}^{-1}$. Entonces acá lo que estamos diciendo es que la matriz

$$\boldsymbol{A}_{\mathcal{BB}} = C_{\mathcal{BE}}^{-1} \boldsymbol{A} C_{\mathcal{BE}}$$

es diagonal cuando $\mathcal{B}$ es una base dada por autovalores y tiene a los autovalores de $\boldsymbol{A}$ como elementos de la diagonal.

Si lo pensamos en el contexto de transformaciones lineales, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ representa una transformación lineal que toma elementos en la base $\mathcal{E}$ y devuelve el resultado transformado en base $\mathcal{E}$. En cambio $\boldsymbol{A}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ es la misma transformación lineal pero tomando elementos de la base $\mathcal{B}$ y devolviendolos también en la base $\mathcal{B}$. En tal caso, cuando tenemos que las dos matrices representan a la misma transformación lineal pero en distintas bases, diremos que son *semejantes*

Definición

Se dice que dos matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son *semejantes* si existe una matriz $\boldsymbol{C}$ tal que

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$$

Ejercicio 3

Sea una transformación lineal

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 + 3x_3 \\ -3x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Decidir si es posible encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ de modo tal que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$, la matriz de la transformación que toma vectores en $\mathcal{B}$ y devuelve vectores en $\mathcal{B}$, sea diagonal. En tal caso, dar la matriz de cambio de base $C_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$.

Solución: Se puede ver que $[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz con la que trabajamos en el ejercicio 2. Por la proposición, sabemos que si podemos formar una base de $\mathbb{C}^n$ con los autovectores de la matriz, entonces

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = C_{\mathcal{E}\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}}C_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$$

sería diagonal.

Sabemos que el conjunto de los autovectores de la matriz $\boldsymbol{A} = [f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ es $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Veamos si es una base de $\mathbb{C}^3$. Formamos una matriz con ellos, llamemosla M

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

y como tiene $\det(M) = 1 \cdot (1 - (-1)) = 2 \neq 0$, la única solución de $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i w_i$ es $\alpha_i = 0\ \forall i$, con lo que son linealmente independientes, y por ende, forman una base de $\mathbb{C}^3$.

Esto quiere decir que tomar $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ hace que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ sea diagonal. Chequeémoslo:

La matriz $C_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ de cambio de base es

$$C_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

y para hallar su inversa $C_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, hacemos eliminación gaussiana como siempre:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - iF_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -i & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 - iF_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Por lo que, para finalizar, tenemos que la matriz $[f]_{\mathcal{BB}}$ es

$$[f]_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ 0 & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+3i & 0 \\ 0 & 0 & 1-3i \end{pmatrix}$$

La cual es, efectivamente, diagonal, y tiene a los autovalores de $[f]_{\mathcal{EE}}$ en la misma.
Si se fijan, el resultado obtenido es lógico, pues

- $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}\right) \underset{\text{Autovalor de } [f]_{\mathcal{EE}}}{=} 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$
- $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}\right) \underset{\text{Autovalor de } [f]_{\mathcal{EE}}}{=} (1+3i) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = (1+3i) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+3i \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$
- $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}\right) \underset{\text{Autovalor de } [f]_{\mathcal{EE}}}{=} (1-3i) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = (1-3i) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-3i \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

Forman las columnas de la matriz $[f]_{\mathcal{BB}}$.

Definición

Dada una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y un autovalor λ de $\boldsymbol{A}$, definimos:

- La *multiplicidad algebraica* de λ como la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico de $\boldsymbol{A}$, es decir, de $\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$.
- La *multiplicidad geométrica* de λ como la dimensión del espacio de autovalores asociados a λ, es decir, como $\dim(E_\lambda)$.

Proposición

Dada una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, y un autovalor de la misma, su multiplicidad geómetrica es siempre menor o igual a la multiplicidad algebraica.

Ejercicio 4

Sea $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz dada por

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hallar sus autovalores y determinar la multiplicidad algebraica y geométrica de cada uno.

Solución: Los autovalores de esta matriz son las raíces de su polinomio característico

$$\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda - 4)^2$$

es decir, que su único autovalor es 4, que tiene multiplicidad algebraica 2. Para ver su multiplicidad geométrica debemos ver su espacio de autovectores asociado.

$$E_\lambda = \ker(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Al ser la dimensión del mismo 1, tenemos que la multiplicidad geométrica de $\lambda = 4$ es 1.

Proposición

Dada una matriz cuadrada $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y un autovalor λ de la misma, la multiplicidad geométrica del mismo es siempre menor o igual que la multiplicidad aritmética

Definición

Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz cuadrada. Decimos que es *diagonalizable* si existen

- $\boldsymbol{D}$ una matriz diagonal cuya diagonal principal tiene a los autovalores λ_i de $\boldsymbol{A}$ apareciendo cada uno tantas veces como indique su multiplicidad algebraica.
- $\boldsymbol{P}$ una matriz cuyas columnas son los vectores que constituyen una base del subespacio E_{λ_i} siguiendo el orden establecido en $\boldsymbol{D}$.

de modo que valga

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$$

Hay varias maneras equivalentes que se pueden demostrar para ver que una matriz es diagonalizable, y muchas veces es conveniente usar una o la otra así que acá les dejo varias equivalencias de que una matriz sea diagonalizable, que podrán ser útiles según el contexto:

Proposición

Dada una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con autovalores $\{\lambda_i : i = 1, \dots, k\}$, las siguientes proposiciones son todas equivalentes:

- $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable
- $\boldsymbol{A}$ es semejante a una matriz diagonal, es decir, existe una matriz cuadrada $\boldsymbol{P} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible tal que
$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{D}$$
es una matriz diagonal.
- Existe una base de $\mathbb{K}^n$ formada por autovectores de $\boldsymbol{A}$.
- La suma de las multiplicidades geométricas de los autovalores es igual a n, es decir,
$$\dim(E_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(E_{\lambda_k}) = n\,.$$
- Para cada autovalor λ_i de $\boldsymbol{A}$, su multiplicidad geométrica es igual a la algebraica.

Corolario

Si una matriz $\boldsymbol{A}$ tiene n autovalores distintos, entonces es diagonalizable

Demostración. Como cada autovalor tiene multiplicidad algebraica 1, es inmediato que los subespacios de autovectores asociados tienen multiplicidad geométrica 1, y por ende su suma da n, o lo que es equivalente, la matriz $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable. $\square$

Ejercicio 5

Demostrar que si una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es inversible y diagonalizable, entonces $\boldsymbol{A}^{-1}$ es diagonalizable.

Solución: Sabemos que si $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable, entonces existe una base formada por sus autovalores. Ahora, sean λ un autovalor de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{v}$ un autovector de $\boldsymbol{A}$ asociado a λ, vale lo siguiente:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

de donde, multiplicando a ambos lados por $\boldsymbol{A}^{-1}$, tenemos que

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}^{-1}\lambda\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{v}$$

y, entonces, como $\lambda \neq 0$ pues la matriz es inversible, tenemos que

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{v} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{v}$$

es decir, que si $\boldsymbol{v}$ era un autovalor de $\boldsymbol{A}$ inversible, lo es también de $\boldsymbol{A}^{-1}$, por ende, si podíamos formar una base de $\mathbb{K}^n$ con los autovectores de $\boldsymbol{A}$, también lo podemos hacer con los autovectores de $\boldsymbol{A}^{-1}$, pues son los mismos. Resulta entonces que $\boldsymbol{A}^{-1}$ es diagonalizable.

Otra manera de verlo es que si existen $\boldsymbol{D}$ diagonal y $\boldsymbol{P}$ tales que

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$$

entonces

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{-1} &= (\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1})^{-1}\\ &= (\boldsymbol{P}^{-1})^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\\ &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\end{aligned}$$

Luego, si viéramos que $\boldsymbol{D}^{-1}$ es diagonal, ya estamos porque efectivamente hallamos una matriz diagonal semejante a $\boldsymbol{A}$.

Veámoslo. Recordando que $\boldsymbol{D}$ tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Lo más sencillo es proponer como inversa la matriz

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} d_{11}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn}^{-1} \end{pmatrix},$$

la cual es diagonal, y ver que efectivamente vale que

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} d_{11}d_{11}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn}d_{nn}^{-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}$$

□

Cada uno decidirá cuál le parece la forma más cómoda de demostrarlo, pero creo que es una buena idea que se familiaricen con todas las equivalencias, para que puedan usar la que más copada les parezca según el contexto.

Observación

Otra cosa que podemos inferir rápidamente de la proposición, por ejemplo, es que la suma de matrices diagonalizables, no es necesariamente diagonalizable.

Tomemos por ejemplo la matriz no diagonalizable $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Tenemos que

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2$$

y estas dos matrices $\boldsymbol{B}_1$ y $\boldsymbol{B}_2$ podemos ver inmediatamente que son diagonalizables porque tienen dos autovalores distintos (los elementos de la diagonal), los cuales aparte son fáciles de hallar gracias a que la matriz es triangular.

Como conclusión, la proposición también sirve para encontrar fácilmente contraejemplos a afirmaciones.

Ejercicio 6

Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Solución:

(a) Para la matriz $\boldsymbol{A}$, ya vimos a lo largo del ejercicio 2 y 3 tanto que la podíamos escribir como semejante a una matriz diagonal, como que existía una base de $\mathbb{C}^3$ formada por sus autovectores, como que la suma de las multiplicidades geométricas daba 3, y también que para cada autovalor, su multiplicidad algebraica era igual a la geométrica (1 en todos los casos), así que, de vuelta, podemos elegir la que prefiramos, pero lo que es seguro es que $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable.

(b) Para la matriz $\boldsymbol{B}$, cuyos autovalores y sus multiplicidades calculamos en el ejercicio 4, nos sirve utilizar la equivalencia de que una matriz es diagonalizable si y solo si sus autovalores tienen igual multiplicidad algebraica y geométrica. En este caso, como vimos que el único autovalor de la matriz $\lambda = 4$ tiene multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1, será imposible que la matriz sea diagonalizable.

Exploremos ahora las aplicaciones de la diagonalización. Entre las incontables que existen, hay una que es particularmente interesante

Proposición

Sea $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalizable, podemos calcular, para todo $m \in \mathbb{N}$, las potencias de la misma como

$$\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^m\boldsymbol{P}^{-1}$$

La utilidad de esto radica en que es simple calcular las potencias de una matriz diagonal, es decir, calcular $\boldsymbol{D}^m$ se reduce a elevar a la m cada una de sus entradas, lo que reduce la complejidad del proceso. Vamos a demostrar la proposición.

Demostración. Hagámoslo por inducción. El caso base $k = 1$ es lo que ya sabemos: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}^{-1}$. Resta ver el paso inductivo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{k+1} &= \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A} \\
&\underbrace{=}_{\text{H.I.}} \boldsymbol{PD}^k\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{PDP}^{-1} \\
&= \boldsymbol{PD}^k\boldsymbol{DP}^{-1} \\
&= \boldsymbol{PD}^{k+1}\boldsymbol{P}^{-1}
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 7

Dada la matriz $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcular $\boldsymbol{C}^{100}$.

Solución: Bueno, una opción es ponernos a multiplicar 100 veces la matriz consigo misma. Buena suerte al que lo intente, pero yo prefiero diagonalizar la matriz.

Su polinomio característico es $\lambda^2 - 7\lambda + 10$, con lo que sus autovalores son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 2$. A esta altura, ya sabemos que la matriz es diagonalizable, porque tiene n autovalores distintos. Aún así, en este caso nos interesa computar sus autovectores, que resultan ser:

$$E_{\lambda_1} = \ker(\boldsymbol{C} - 5\boldsymbol{I}) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_{\lambda_2} = \ker(\boldsymbol{C} - 2\boldsymbol{I}) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Tenemos entonces que la matriz $\boldsymbol{P}$ es $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, y podemos hallar su inversa con la fórmula de la adjunta y el determinante, resultando en que la misma es

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{P})}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora sí, tenemos la diagonalización de $\boldsymbol{C}$ como

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y, entonces, por la proposición de recién, resulta que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C}^{100} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^{100} & -2^{100} \\ 5^{100} & 2^{101} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\cdot 5^{100} + 2^{100} & 5^{100} - 2^{100} \\ 2\cdot 5^{100} - 2^{101} & 5^{100} + 2^{101} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Muchas veces puede también ser útil utilizar dos propiedades que aprovechamos para demostrar como ejercicio

Ejercicio 8

Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz cuadrada diagonalizable con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (contando autovalores repetidos por su multiplicidad si fuera necesario). Demostrar las siguientes proposiciones:

(a) $\det(\boldsymbol{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

(b) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Solución:

(a) La primera proposición es útil pues una vez demostrada es evidente que una matriz es inversible si y sólo si todos sus autovalores son distintos de 0. Vamos a ello:

Consideremos el polinomio característico de $\boldsymbol{A}$ dado por $\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$. Como $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de $\boldsymbol{A}$ repetidos por su multiplicidad, seguro que vale que el polinomio $\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ es factorizable como

$$\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

Luego, si evaluamos $\chi_{\boldsymbol{A}}(0)$ resulta:

$$\chi_{\boldsymbol{A}}(0) = \det(-\boldsymbol{A}) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Con lo que al ser $\det(-\boldsymbol{A}) = (-1)^n \det(\boldsymbol{A})$ llegamos a que

$$\det(\boldsymbol{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$\square$

(b) Demostraron en el ejercicio 16 de la guía 1 que $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$, a partir de eso, considerando que la matriz es diagonalizable, y por tanto, expresable como

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}^{-1}$$

Para una matriz $\boldsymbol{P}$ inversible y $\boldsymbol{D}$ diagonal con los autovalores de $\boldsymbol{A}$ en la diagonal.

Tomando traza a ambos lados, y aplicando el ejercicio 16 de la guía 1, tenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{PDP}^{-1}) \\
&= \operatorname{tr}(\boldsymbol{DP}^{-1}\boldsymbol{P}) \\
&= \operatorname{tr}(\boldsymbol{D}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 9

Números de Pell: Sea la sucesión de números naturales P_n definida como

$$P_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ 2P_{n-1} + P_{n-2} & \text{si no} \end{cases}$$

Hallar el término general de la sucesión P_n.

Solución: Lo interesante de este ejercicio es que podemos pensarlo de forma matricial y resolverlo gracias a la diagonalización. Podemos ver que si definimos $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, resulta que para $n \geq 2$ vale

$$\begin{pmatrix} P_n \\ P_{n-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ P_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ P_{n-2} \end{pmatrix}$$

Esto lo podemos llevar incluso más allá, viendo que, en general, vale para $n \in \mathbb{N}$ que

$$\begin{pmatrix} P_n \\ P_{n-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{n-1} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_0 \end{pmatrix}$$

Y acá se hace evidente que si podemos hallar de forma cerrada $\boldsymbol{A}^{n-1}$, podremos hallar el término general de la serie. ¿Cómo hacíamos cuando queríamos elevar a una matriz a potencias grandes? Claro, diagonalizamos.

Observación

Deje esta última afirmación sin demostración pero sale en un par de líneas con inducción, al que le interese lo puede hacer para practicar.

El polinomio característico de la matriz es $\chi_{\boldsymbol{A}} = \lambda^2 - 2\lambda - 1$, con lo que sus autovalores son $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ y $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$. Se puede ver también que sus autovectores son los espacios $E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Tenemos entonces toda la información que necesitamos para hallar la diagonalización. Resulta entonces que la misma es

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

Finalmente podemos obtener la fórmula cerrada de P_n a partir de elevar a $\boldsymbol{A}$ a la n.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P_n \\ P_n - 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1}\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{(1-\sqrt{2})^{n-1}\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(1+\sqrt{2})^{n}\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})^{n}\sqrt{2}}{4} \\ \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1}\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})^{n-1}\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(1+\sqrt{2})^{n}-(1-\sqrt{2})^{n}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1}-(1-\sqrt{2})^{n-1}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que la fórmula cerrada para los números de Pell es:

$$P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

Ejercicio 10

Dada una matriz $\boldsymbol{A}$ diagonalizable, demostrar que $\boldsymbol{A}^k + k\boldsymbol{I}$ es diagonalizable para todo $k \in \mathbb{N}$.

Solución: Sabemos que si $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable, la podemos escribir como $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^k + k\boldsymbol{I} &= (\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1})^k + k\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^k\boldsymbol{P}^{-1} + \boldsymbol{P}k\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}^k + k\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1} \end{aligned}$$

y como $\boldsymbol{D}^k + kI$ es una matriz diagonal, queda probado lo que queríamos. $\square$