

Álgebra II
Primer Cuatrimestre - 2025
Práctica 7
Teorema de estructura

1. Sea M un A -módulo. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.
 - (I) De todo sistema de generadores de M puede extraerse una base.
 - (II) Todo conjunto linealmente independiente en M puede extenderse a una base.
 - (III) Todo módulo es libre.
 - (IV) Todo submódulo de un módulo libre es libre.
 - (V) Si $x \in M$ es no nulo entonces $\{x\}$ es linealmente independiente.
 - (VI) Existen módulos libres con elementos no nulos que son linealmente dependientes.
 - (VII) Existen módulos no libres tales que todo elemento no nulo es linealmente independiente.
2. Sea A un dominio íntegro. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.
 - (I) Si M es un A -módulo libre entonces es sin torsión.
 - (II) Si $f: M \rightarrow N$ es un morfismo de A -módulos y M es de torsión entonces $\text{Im}(f)$ es de torsión.
 - (III) Si $f: M \rightarrow N$ es un morfismo de A -módulos y M es sin torsión entonces $\text{Im}(f)$ es sin torsión.
3. Sea A un dominio íntegro, sea M un A -módulo y $S \subset M$ un submódulo. Probar que $t(S) = S \cap t(M)$.
4. Calcular $t(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.
5. Sea A un dominio íntegro y sean M y N dos A -módulos. Probar que:
 - (I) si N es sin torsión entonces $\text{Hom}_A(M, N)$ es sin torsión;
 - (II) Si M es de torsión y N es sin torsión entonces $\text{Hom}_A(M, N) = 0$.
6. Sea A un dominio íntegro y sea $(M_i)_{i \in I}$ una familia de A -módulos. Probar que
 - (I) $t(\prod_{i \in I} M_i) \subseteq \prod_{i \in I} t(M_i)$.
 - (II) $t(\bigoplus_{i \in I} M_i) = \bigoplus_{i \in I} t(M_i)$.
7. Sea A un dominio íntegro, y sean M y N dos A -módulos. Probar que si M o N son de torsión entonces $M \otimes_A N$ es de torsión.
8. Clasificar los grupos abelianos de orden 16 , 27 y p^6 para cada $p \in \mathbb{N}$ primo.
9. Sea G un grupo abeliano de orden p^5 , con p primo. Calcular los posibles órdenes del subgrupo $\{x \in G : x^p = 1\}$.

10. Clasificar los grupos abelianos de orden 6, 12, 18, 45, 50, 100 y 180.

11. Caracterizar los grupos abelianos finitos tales que:

- (I) Todo subgrupo propio de G es cíclico.
- (II) Todo subgrupo propio de G es de orden primo.
- (III) Todo subgrupo propio no nulo de G es maximal.
- (IV) Para todo par de subgrupos S y T de G , $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.
- (V) El orden de todo elemento no nulo de G es primo.
- (VI) G/S es cíclico para todo subgrupo S no nulo de G .

12. Calcular los factores invariantes de los siguientes grupos:

- (I) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.
- (II) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$.
- (III) G un grupo abeliano de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.
- (IV) G un grupo abeliano de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 de G es isomorfo a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.