Álgebra II

Primer Cuatrimestre - 2025

Práctica 6

Exactitud y producto tensorial

---

1. Sea

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha'"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists\alpha''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f'"] & N \arrow[r, "g'"] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos de flechas sólidas cuyas filas son exactas. Pruebe que existe una única flecha punteada $\alpha''\colon M'' \longrightarrow N''$ que completa el diagrama a uno conmutativo, y que si α y α' son isomorfismos entonces α'' es un isomorfismo.

2 (Lema de los cinco)**.** Sea

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos cuyas filas son exactas. Pruebe que que si α, β, δ y ε son isomorfismos entonces γ es un isomorfismo.

3. Sean A un anillo y N, N', N'' tres A-módulos.

(I) Probar que una sucesión
$$0 \longrightarrow N \longrightarrow N' \longrightarrow N''$$
es exacta si y sólo si para todo A-módulo M, la sucesión
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N'')$$
es exacta.

(II) Probar que la exactitud de
$$0 \longrightarrow N \longrightarrow N' \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$
no implica siempre la exactitud de
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N'') \longrightarrow 0.$$

4 (Proyectivos)**.** Decimos que un A-módulo P es *proyectivo* si $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ envía sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas cortas. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

(I) P es proyectivo.

(II) para cada epimorfismo $p\colon M \to N$ y morfismo $f\colon P \to N$, el diagrama de flechas sólidas

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, two heads, "p"] \\ P \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

puede completarse con una flecha punteada —no necesariamente única— de forma que siga siendo conmutativo.

(III) existen un conjunto I y un A-módulo Q tal que $P \oplus Q \cong A^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} A$.

(IV) toda sucesión exacta corta

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

se parte, es decir, es tal que g admite una sección.

5. Pruebe que si P y Q son dos A-módulos proyectivos entonces $P \oplus Q$ es un módulo proyectivo.

6. Sea P un A-módulo finitamente generado. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

(I) P es proyectivo;

(II) existen $n \in N$ y Q un A-módulo tal que $P \oplus Q \cong A^n$;

(III) existe $n \in \mathbb{N}$ y $p\colon A^n \to A^n$ un proyector tal que $P = \operatorname{Im}(p)$.

7. Sea A un anillo conmutativo y $M, (N_i)_{i\in I}$ A-módulos. Probar que se tienen los siguientes isomorfismos de grupos abelianos

$$\operatorname{Hom}_A(M, \prod_{i\in I} N_i) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_A(M, N_i), \quad \operatorname{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I} N_i, M) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_A(N_i, M).$$

8. Probar que $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/(n:m)\mathbb{Z}$.

9. Sea A un anillo conmutativo y M un A-módulo.

(I) Sea M un A-módulo e I un ideal de A. Probar que $(A/I) \otimes_A M \simeq M/IM$.

(II) Sean I, J ideales de A. Probar que $A/I \otimes_A A/J \simeq A/(I+J)$.

10. Sean N un A-módulo a derecha y $(M_i)_{i\in I}$ una familia de módulos a izquierda. Probar que

$$N \otimes_A \bigoplus_{i\in I} M_i \cong \bigoplus_{i\in I} N \otimes_A M_i.$$

Deducir que $A^{(I)} \otimes_A A^{(J)} \cong A^{(I\times J)}$ para todo par de conjuntos I,J.

11. Pruebe que si $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ es una sucesión exacta corta de $\mathbb{Z}$-módulos, entonces

$$0 \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M' \xrightarrow{1_{\mathbb{Q}}\otimes f} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{1_{\mathbb{Q}}\otimes g} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M'' \to 0$$

es una sucesión exacta corta de $\mathbb{Q}$-módulos. ¿Es cierto esto si reemplazamos $\mathbb{Q}$ por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

12. Dado un $\mathbb{Z}$-módulo M, definimos su *rango* como $\operatorname{rk} M := \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$. Probar que:

(I) si M es libre y B es una base de M, entonces $\operatorname{rk} M = \#B$.

(II) si M es finito, entonces $\operatorname{rk} M = 0$.

(III) si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta corta, entonces $\operatorname{rk} M = \operatorname{rk} M' + \operatorname{rk} M''$.

(IV) si $f\colon N \to M$ es un morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos, entonces

$$\operatorname{rk} \operatorname{Im}(f) + \operatorname{rk} \operatorname{Nu}(f) = \operatorname{rk} N.$$