Álgebra II

Primer Cuatrimestre - 2025

Práctica 5

Módulos

---

1. Determinar si M es un A-módulo en cada uno de los siguientes casos:

(I) $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, con $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m \mid n$, la suma usual de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ y la acción dada por $\overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{ax}$.

(II) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_2(\mathbb{C})$, con la suma usual de matrices y la acción producto usual de matriz por escalar.

(III) $A = \mathbb{R}[X]$, $M = \mathbb{R}^n$, con la suma usual de $\mathbb{R}^n$ y la acción

$$f \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f(1)x_1, f(0)x_2, \ldots, f(0)x_n).$$

(IV) $A = M_n(\mathbb{Z})$, $M = \mathbb{Z}$, con la suma usual de números enteros y la acción $a \cdot x = \det(a)x$ para $a \in M_n(\mathbb{Z})$ y $x \in \mathbb{Z}$.

2. Sea k un cuerpo.

(I) Sea V un k-espacio vectorial y sea $f \in \mathrm{End}_k(V)$. Probar que existe una única estructura de $k[X]$-módulo en V que satisface

$$\lambda X^0 \cdot v = \lambda \cdot v \ \text{ y } \ X \cdot v = f(v).$$

(II) Sea M un $k[X]$-módulo y sea $f \colon M \longrightarrow M$ la función definida por $f(v) = X \cdot v$. Probar que con la acción $k \cdot v := (kX^0) \cdot v$ y la suma $+$ de M, este último resulta un k-espacio vectorial y $f \in \mathrm{End}_K(M)$.

3. Sean A y B anillos, sea M un B-módulo y sea $\varphi \colon A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Pruebe que la acción $a \cdot_{\varphi} x := \varphi(a) \cdot x$ define una estructura de A-módulo sobre M.

4. Determinar si S es un submódulo del A-módulo M en cada uno de los siguientes casos:

(I) $A = \mathbb{Q}$, $M = M_n(\mathbb{Q})$, $S = \{a \in M_n(\mathbb{Q}) : a_{ii} = 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}$.

(II) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_n(\mathbb{Z})$, $S = \{a \in M_n(\mathbb{Z}) : \det(a) = 0\}$.

(III) A un anillo, $M = A^n$, $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in A^n : x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

(IV) A un anillo conmutativo, $M = A[X]$ y $S = A_n[X] = \{f \in A[X] : f = 0 \text{ o } \deg(f) \leq n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

5. Sea A un anillo conmutativo y sea $a \in A^{n\times m}$. Probar que la aplicación $f_a : A^{m\times 1} \longrightarrow A^{n\times 1}$ definida por $f_a(x) = a \cdot x$ (donde $\cdot$ es el producto de matrices) es un morfismo de A-módulos.

6. Sean M, N y P tres A-módulos y sean $f \colon M \longrightarrow N$ y $g \colon N \longrightarrow P$ dos funciones. Probar que:

(I) si $g \circ f$ es un morfismo de A-módulos y g es un monomorfismo, entonces f es un morfismo de A-módulos;

(II) si $g \circ f$ es un morfismo de A-módulos y f es un epimorfismo, entonces g es un morfismo de A-módulos.

7. Sean M y N dos A-módulos y $f\colon M \longrightarrow N$ una función. Probar que f es un morfismo de módulos si y sólo si su *gráfico* $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in M\}$ es un submódulo de $M \times N$.

8. Caracterizar el A-módulo cociente M/S en cada uno de los siguientes casos:

(I) $N = M^n$, $S = \{x \in N : x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

(II) $N = M^n$ con $n > 2$, $S = \{x \in N : x_1 = x_n \text{ y } x_2 = 0\}$.

(III) $N = A[X]$, $S = \{f \in A[X] : f(1) = 0\}$.

(IV) $N = M_n(A)$, $S = \{(a \in M_n(A) : a_{ii} = 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}$.

(V) dado X un conjunto e $I \subset X$, $N = M^X$, $S = \{x \in N : x_i = 0 \text{ para todo } i \in I\}$.

9. Sea A un anillo y M, N dos A-módulos a izquierda.

(I) Probar que $M^* := \mathrm{Hom}_A(M, A)$ es un A-módulo *a derecha* con acción $(f \cdot a)(x) = f(x)a$.

(II) Concluir que $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es un $\mathcal{C}(A)$-módulo con la acción dada por $(a \cdot f)(x) = af(x)$. ¿Por qué esto no define una acción a izquierda para todo elemento de A?

(III) Probar que $\mathrm{Hom}_A(A, M) \simeq M$ como $\mathcal{C}(A)$-módulos.

10. Sean A un anillo conmutativo y M un A-módulo. Su *dual* es el A-módulo a derecha $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$. Probar que la aplicación

$$\mathrm{ev}\colon M \longrightarrow M^{**}, \qquad \mathrm{ev}(x)(f) = f(x)$$

es un morfismo de A-módulos y que $\mathrm{Nu}(\mathrm{ev}) = \bigcap_{f \in M^*} \mathrm{Nu}(f)$.

11. Probar que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$.

12. Un A-módulo M se dice *simple* si $M \neq \{0\}$ y sus únicos submódulos son $\{0\}$ y M.

(I) Probar que un A-módulo M es simple si y sólo si $M \neq \{0\}$ y $A \cdot x = M$ para todo $x \in M \setminus \{0\}$.

(II) Sea $f\colon M \longrightarrow N$ un morfismo de A-módulos. Probar que

(a) Si M es simple, entonces $f = 0$ o f es un monomorfismo.

(b) Si N es simple, entonces $f = 0$ o f es un epimorfismo.

(c) Si M y N son simples, entonces $f = 0$ o f es un isomorfismo,

(III) Probar que si M es simple, entonces $\mathrm{End}_A(M)$ es un anillo de división.

13. Probar que los grupos abelianos $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{Q}_{>0}$ y $\mathbb{R}_{>0}$ no son de tipo finito.

14. Sea M un A-módulo no nulo de tipo finito. Probar que si $\mathcal{S}$ es un sistema de generadores de M entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{S}$ tales que $M = Ax_1 + \cdots + Ax_n$.

15. Sea A un anillo, sea M un A-módulo y sea $\mathcal{S}$ un sistema de generadores de M. Decimos que $\mathcal{S}$ es un *sistema de generadores minimal* de M si ningún subconjunto propio de $\mathcal{S}$ es un sistema de generadores de M.

(I) Probar que todo A-módulo de tipo finito posee un sistema de generadores minimal.

(II) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathbb{Z}$ como grupo abeliano admite un un sistema de generadores minimal de n elementos.

16. Sea A un dominio íntegro y sea $a \in M_n(A)$. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, sea $v_j = (a_{1j}, \ldots a_{nj}) \in A^n$. Probar que:

(I) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

(II) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un sistema de generadores de A^n si y sólo si $\det(A) \in \mathcal{U}(A)$.

17. Sean A un anillo y M un A-módulo. Probar que si todo conjunto no vacío de submódulos de tipo finito de M tiene un elemento maximal, entonces M es noetheriano.

18. Dar ejemplos de:

(I) un A-módulo de tipo finito que no sea noetheriano;

(II) un A-módulo tal que todo submódulo propio sea de tipo finito y que no sea noetheriano.

19. Sean $M_1, \ldots, M_n$ una familia de A-módulos. Probar que $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ es noetheriano si y sólo si M_i es noetheriano para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

20. Probar que un k-espacio vectorial V es noetheriano si y sólo si $\dim_k(V) < \infty$.

21. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Sea $f \in \operatorname{End}_A(M)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $K_n = \operatorname{Nu}(f^n)$ e $I_n = \operatorname{Im}(f^n)$. Probar que:

(I) si $K_1 = K_2$, entonces $K_1 \cap I_1 = 0$;

(II) si $I_1 = I_2$, entonces $K_1 + I_1 = M$;

(III) si M es noetheriano, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \cap I_n = 0$;

(IV) si M es noetheriano y f es un epimorfismo, entonces f es un automorfismo.

22. Probar que no existen epimorfismos de $\mathbb{Z}$-módulos:

(I) de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;

(II) de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$;

(III) de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

23. Sea p un primo. Probar que no existen secciones:

(I) de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$;

(II) de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$;

(III) de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$;

24. Sea M un A-módulo y sean S y T submódulos de M. Probar que $M = S \oplus T$ si y sólo si existe $p\colon M \longrightarrow M$ tal que $p^2 = p$, $S = \operatorname{Nu}(p)$ y $T = \operatorname{Im}(p)$.

25. Sea M un $\mathbb{Z}$-módulo y sean S y T submódulos de M tales que $M = S \oplus T$. Probar que si existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en M entonces existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en S o existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en T.