

Álgebra II
Primer Cuatrimestre - 2025
Práctica 4
Anillos

Primeros ejemplos, ideales y cocientes

1. Sean $A, A_1, \dots, A_n$ anillos y X un conjunto. Probar que los siguientes conjuntos, con las operaciones definidas, tienen estructura de anillo:

- (I) $A^X = \{f : X \rightarrow A \text{ función}\}$ con la suma y el producto puntual;
- (II) el producto de anillos $A_1 \times \dots \times A_n$ con operaciones coordenada a coordenada;
- (III) dados $X \subset \mathbb{R}^n$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}^\infty(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ infinitamente derivable}\}$ como subanillos de $\mathbb{R}^X$ y $\mathbb{R}^U$ respectivamente;
- (IV) $\text{End}(M)$ con M un grupo abeliano y operaciones la suma puntual y la composición;
- (V) $\mathbb{R}[\varepsilon]$, cuyo conjunto subyacente es $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$; la suma es coordenada a coordenada y, notando $a + \varepsilon b$ a (a, b) , el producto $(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = ac + \varepsilon(bc + ad)$.

Decidir cuáles son conmutativos, cuáles son dominios íntegros, cuáles son anillos de división y cuáles son cuerpos.

2. Dar ejemplos de:

- (I) un anillo de división que no sea cuerpo;
- (II) un anillo que no sea íntegro;
- (III) un anillo íntegro que no sea de división.

3. Sea A un anillo conmutativo y $f \neq 0$ en $A[X]$. Probar que si f es un divisor de cero en $A[X]$ entonces existe $a \in A \setminus \{0\}$ tal que $af = 0$. Concluya que si A es un dominio íntegro, entonces $A[X]$ es un dominio íntegro.

4. Caracterice las unidades y divisores de cero del anillo $\mathcal{C}[0, 1]$ de funciones continuas a valores reales definidas en $[0, 1]$.

5. Pruebe que $2 + \sqrt{3}$ es una unidad en $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

6. Sea A un anillo conmutativo y sea B un subanillo de A . Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- (I) Si A es un cuerpo, entonces B es un cuerpo.
- (II) Si A es un dominio íntegro, entonces B es un dominio íntegro.
- (III) Si B es un dominio íntegro, entonces A es un dominio íntegro.

7. Pruebe que un anillo A es de división si y sólo si sus únicos ideales a izquierda son 0 y A .

8. Sea k un cuerpo. Pruebe que los únicos ideales biláteros de $M_2(k)$ son 0 y $M_2(k)$. ¿Es $M_2(k)$ un anillo de división?

9. Sea k un cuerpo. Pruebe que toda k -álgebra de dimensión finita sobre k es isomorfa a una subálgebra de $M_n(k)$.

Sugerencia: piense en el teorema de Cayley para grupos.

10 (Anillo de grupo). Sea G un grupo. El soporte de una función $f: G \rightarrow \mathbb{Z}$ es el conjunto

$$\text{sop}(f) := \{g \in G : f(g) \neq 0\}.$$

El anillo de grupo de G es el conjunto

$$\mathbb{Z}[G] = \{f: G \rightarrow \mathbb{Z} : \text{sop}(f) \text{ es finito}\}$$

con operaciones

$$(f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g), \quad (f_1 \cdot f_2)(g) = \sum_{st=g} f_1(s)f_2(t).$$

Verifique que $\mathbb{Z}[G]$ es un anillo. Identificamos a $g \in G$ con la función característica χ_g , y notamos $\sum_{g \in G} a_g g$ a la función que vale $a_g \in \mathbb{Z}$ en cada $g \in G$. Se tienen luego las siguientes igualdades:

$$\sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g)g \quad ; \quad \sum_{g \in G} a_g g \cdot \sum_{h \in G} b_h h = \sum_{g \in G} \left(\sum_{st=g} a_s b_t \right) g = \sum_{g, h \in G} a_g b_h gh.$$

11. Probar que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un morfismo de anillos entonces $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$. ¿Cómo son los morfismos de anillos $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$?

12. Calcule el grupo de automorfismos de anillos de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.

13. Pruebe que para todo anillo A hay biyecciones $\text{Hom}(\mathbb{Z}[X], A) \cong A$ y $\text{Hom}(\mathbb{Z}[G], A) \cong \text{Hom}(G, A^\times)$.

14. Pruebe la existencia de los siguientes isomorfismos:

$$(I) \quad \mathbb{Q}[X]/(X^3 + X) \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[i].$$

$$(IV) \quad \mathbb{Z}[i]/(1 + i) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$$(II) \quad \mathbb{R}[X]/(X^4 - 1) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}.$$

$$(V) \quad \mathbb{Z}[i]/(1 + 2i) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

$$(III) \quad \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{Z}[i].$$

$$(VI) \quad \mathbb{Z}[X]/(n) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[X], n \in \mathbb{N}.$$

Ideales primos y maximales

15. Sean $I_1, \dots, I_n$ ideales de un anillo conmutativo A y sea $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo tal que $\bigcap_{i=1}^n I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

(I) Probar que existe $1 \leq i \leq n$ tal que $I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

(II) Probar que si $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^n I_i$, entonces $\mathfrak{p} = I_i$ para algún $1 \leq i \leq n$.

16. Sea I un ideal de un anillo conmutativo A . Probar que

$$\sqrt{I} = \{a \in A : \text{existe } r \in \mathbb{N} \text{ tal que } a^r \in I\}$$

es un ideal de A , que denominamos el *radical* de I .

17. Sean A y B dos anillos conmutativos y $f: A \rightarrow B$ un morfismo de anillos. Pruebe que si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de B , entonces $f^{-1}(\mathfrak{p})$ es un ideal primo de A . ¿Es cierta la afirmación si reemplazamos primo por maximal?

18. Sea A un dominio íntegro. Pruebe que A es un dominio principal si y sólo si todo ideal primo de A es principal.

19. Probar que $\mathfrak{m} = (3, Y^4 - X, Y^{12} - X^3 + Y - 1)$ es un ideal maximal de $\mathbb{Z}[X, Y]$.

20. Sea $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(I) Probar que $2, 3, 1 + \sqrt{-5}$ y $1 - \sqrt{-5}$ son irreducibles en A .

(II) Notar que $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$ y concluir que A no es un DFU.

(III) Probar que 3 no es primo.

(IV) Pruebe que $(2, 1 + \sqrt{-5})$ no es principal.

21. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $X \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que los ideales de $\mathcal{C}(X)$ de la forma

$$\mathfrak{m}_p := \{f \in \mathcal{C}(X) : f(p) = 0\}, \quad (p \in X)$$

son maximales. Pruebe además que si X es compacto entonces todos los ideales maximales de $\mathcal{C}(X)$ son de esta forma.

Noetherianidad

22. Sea A un anillo. Probar que A es noetheriano si y sólo si todo conjunto $\mathcal{I}$ de ideales de A tiene un elemento maximal con respecto al orden dado por la inclusión.

23. Sea A un anillo noetheriano. Pruebe que todo endomorfismo sobreyectivo $f: A \rightarrow A$ es un isomorfismo.

24. Sea A un anillo noetheriano e $I \subset A$ un ideal bilátero. Pruebe que A/I es noetheriano.

Factorización

25. Sea $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Z}[X]$ un ideal primo tal que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} \neq (0)$, y $p \in \mathbb{N}$ primo tal que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Pruebe que o bien $\mathfrak{p} = (p)$ o bien existe $f \in \mathbb{Z}[X]$ que es mónico e irreducible en $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ y tal que $\mathfrak{p} = (p, f)$.

26 (Primos Gaußianos). Probar que:

(I) un primo $p \in \mathbb{Z}$ es congruente a 1 módulo 4 si y sólo si la ecuación $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ tiene solución.

(II) si $x \in \mathbb{Z}$ y $a + ib \in \mathbb{Z}[i]$, entonces $a + ib \mid x$ si y sólo si $a - ib \mid x$.

(III) $a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ es irreducible en $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo si $a^2 + b^2$ es un primo de $\mathbb{Z}$ no congruente a 3 módulo 4.

(IV) probar que un entero $n \in \mathbb{Z}$ es irreducible en $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo si es un primo de $\mathbb{Z}$ congruente a 3 módulo 4.

27 (Lema de Gauß). Sean A un DFU y $K = \text{Frac}(A)$ su cuerpo de fracciones. Sea $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$ con $a_0 \neq 0$. Probar que si p y q son elementos de A no nulos, coprimos entre sí, y tales que $\frac{p}{q} \in K$ es raíz de f , entonces $p \mid a_0$ y $q \mid a_n$ en A .

28. Sean A un dominio íntegro e I un ideal propio de A . Consideramos $\pi: A \rightarrow A/I$ la proyección canónica. Si $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$ es mónico y $\bar{f} := \sum_{i=0}^n \pi(a_i) X^i \in (A/I)[X]$. Probar que si f es reducible en $A[X]$, entonces $\bar{f}$ es reducible en $(A/I)[X]$.

29 (Criterio de Eisenstein). Sean A un DFU y $K = \text{Frac}(A)$ su cuerpo de fracciones. Sea $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$. Supongamos que existe un primo $p \in A$ tal que $p \nmid a_n$, $p \mid a_i$ para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$ y $p^2 \nmid a_0$. Pruebe que f es irreducible en $K[X]$.

30. Probar que los siguientes polinomios son irreducibles:

(I) $X^4 - X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$;

(II) $X^2 + Y^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X, Y]$;

(III) $XY - ZT \in \mathbb{Q}[X, Y, Z, T]$;

(IV) $X^{p-1} + pX^{p-2} + \binom{p}{2}X^{p-3} + \dots + \binom{p}{2}X + p \in \mathbb{Q}[X]$;

(V) $X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

Sugerencia: haga un cambio de variables conveniente.

31. Decida si $Z^7 + 2X^9YZ + 2Y^{10}Z + X + Y \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X, Y, Z]$ es irreducible.