Álgebra II

Primer Cuatrimestre - 2025
Práctica 2
Subgrupos normales y cocientes

---

1. Sean G un grupo y $X \subset G$ un conjunto de generadores. Probar que un subgrupo N de G es normal si y solo si $xNx^{-1} = N$ para todo $x \in X$. Mostrar que si N es finito, entonces alcanza con pedir que $xNx^{-1} \subset N$ para todo $x \in X$.

2. Sean H y K dos subgrupos de G.

(I) Probar que si alguno de ellos es normal, entonces HK es un subgrupo de G.

(II) Probar que si ambos son normales, entonces $HK = KH$ y $HK \lhd G$.

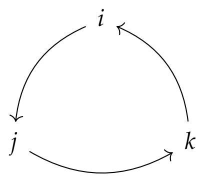
(III) Concluir que si ambos son normales y además $H \cap K = \{1\}$, entonces $HK \cong H \times K$.

3. Describa todos los subgrupos de D_4 y de S_3 y decida cuáles de ellos son normales.

4. Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de 8 elementos $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ dotado del producto dado por las siguientes ecuaciones y la regla usual de los signos:

$$\begin{gathered} i \cdot j = k, \quad j \cdot k = i, \quad k \cdot i = j, \\ j \cdot i = -k, \quad k \cdot j = -i, \quad i \cdot k = -j, \\ i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1. \end{gathered}$$

El par $(\mathcal{H}, \cdot)$ es un grupo no abeliano al que llamamos *grupo de cuaterniones*. El siguiente diagrama permite recordar la tabla de multiplicación de $\mathcal{H}$:



Hallar todos los subgrupos de $\mathcal{H}$. ¿Cuáles son normales?

5. Probar que $\mathcal{H}$ y D_4 no son isomorfos.

6. Consideremos los siguientes subgrupos de S_4:

$$K = \{\mathrm{id},\ (1\,2)(3\,4),\ (1\,3)(2\,4),\ (1\,4)(2\,3)\},\ H = \{\mathrm{id},\ (1\,2)(3\,4)\},\ U = \langle (1\,2\,3\,4) \rangle.$$

(I) Probar que $H \lhd K$, $K \lhd A_4$ y $K \lhd S_4$.

(II) Probar que H no es invariante en A_4 ni en S_4.

(III) Determinar si $U \lhd S_4$.

7. Sea G un grupo y $H \leq G$ tal que $[G : H] = 2$. Probar que $H \lhd G$.

8. Para cada uno de los siguientes grupos G y subgrupos $S \leq G$, determine un sistema de representantes de G módulo S y determine $[G : S]$.

(a) $G = \mathbb{R}$, $S = \mathbb{Z}$.

(b) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $S = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$.

(c) $G = D_n$, $S = \langle r \rangle$.

(d) $G = \mathbb{C}^\times$, $S = S^1$.

(e) $G = \mathbb{C}^\times$, $S = \mathbb{R}^\times \cup \mathbb{R}^\times i$.

9. Pruebe la existencia de los siguientes isomorfismos:

(a) $\mathbb{C}^\times / \mathbb{R}_{>0} \;\cong\; S^1$.

(b) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) / \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \;\cong\; \mathbb{C}^\times$.

(c) $\mathbb{Q}^\times / \mathbb{Q}_{>0} \;\cong\; G_2$.

(d) $S^1 / G_n \;\cong\; S^1$.

(e) Si $m \mid n$ entonces $G_n / G_m \;\cong\; G_{\frac{n}{m}}$.

10. Calcular todos los cocientes de S_3, D_4 y $\mathcal{H}$.

11. Sea G un grupo y $[G, G] := \langle xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G \rangle$ su *subgrupo conmutador*.

(I) Demostrar que $[G, G]$ es normal y $G/[G, G]$ es abeliano.

(II) Demostrar que para todo morfismo de grupos $f : G \to H$, con H **abeliano**, existe un único morfismo de grupos $\tilde{f} : G/[G, G] \to H$ tal que $f = \tilde{f} \circ \pi$, donde $\pi : G \to G/[G, G]$ es la proyección al cociente. Es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & H \\ G/[G,G] \arrow[ur, dashed, "\exists! \tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

(III) Sea $H \leq G$. Demostrar que son equivalentes:

(a) H contiene a $[G, G]$;

(b) $H \lhd G$ y G/H es abeliano.

12. Calcule el centro de $\mathcal{H}$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{D}_n$ para cada $n \geq 2$.

13. Sea G un grupo. Demostrar que si $G/C(G)$ es cíclico entonces G es abeliano.

14. Sea $f \colon G \to G'$ un isomorfismo y sea $H \lhd G$.

(I) Probar que $f(H) \lhd G'$ y $G/H \cong G'/f(H)$.

(II) ¿Es cierto que si existe $H' \lhd G'$ y un isomorfismo $g \colon H \longrightarrow H'$, entonces $G/H \cong G'/H'$?

15. Probar que los únicos grupos no abelianos de orden 8 son $\mathcal{H}$ y D_4.

16. Sea p un primo. Probar que si $|G| = 2p$ entonces G es abeliano o $G \cong D_p$.

17. Sean G un grupo y $H \leq G$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

(I) Si $[G : H] = 2$ y H es abeliano entonces $H \subset C(G)$.

(II) Si $|G| = n$ y $k \mid n$, entonces existe un elemento de orden k en G.

(III) Si $|G| = n$ y $k \mid n$, entonces existe un subgrupo de orden k en G.

(IV) Si todo elemento de G tiene orden finito, entonces G es finito.

(V) Si $|G| = n$ y p es un primo que divide a n, entonces existe un subgrupo de G de índice p.

(VI) Los elementos de orden finito de G forman un subgrupo de G.