Álgebra II

Primer Cuatrimestre - 2025

Práctica 1

Grupos, subgrupos y morfismos de grupos

---

1. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

(I) Probar que $(S^1, \cdot)$ es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in S^1$.

(II) Determinar si S^1 es cíclico.

2. En cada uno de los siguientes casos determinar si $(G, \cdot)$ es un semigrupo, un monoide o un grupo y, en este último caso, determinar si $(G, \cdot)$ es abeliano.

(I) $G = \mathbb{N}_0$, $a \cdot b := \mathrm{mcm}(a, b)$.

(II) $G = \mathbb{Q}_{>0}$, $a \cdot b = ab$.

(III) $G = M_n(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{n\times n}$, $A \cdot B := AB$.

(IV) $G = M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \cdot B := A + B$.

(V) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(a, b) \cdot (c, d) = (a + (-1)^b c, b + d)$.

(VI) $G = \mathcal{U}_n = \{a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : (a : n) = 1\}$, $a \cdot b := r_n(ab)$.

3. Demostrar que los siguientes subconjuntos son subgrupos:

(I) $S^1 < \mathbb{C}^\times$, (II) $\{1, r, r^2, r^3\} < D_4$, (III) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) < \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

4. Demostrar que todo subgrupo finito de $\mathbb{C}^\times$ es algún grupo de las raíces de la unidad.

5. Sean $n, m \in \mathbb{N}$.

1. Demostrar que si n divide a m entonces $G_n < G_m$.
2. Demostrar que $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$
3. Concluir que si $G_n < G_m$ entonces n divide a m.

6 (Producto directo)**.** Sean G, H dos grupos. El producto de G y H es el conjunto $G \times H$ dotado con la operación definida según la aplicación

$$\begin{aligned} (G \times H) \times (G \times H) &\to (G \times H) \\ ((g_1, h_1), (g_2, h_2)) &\mapsto (g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2) \end{aligned}$$

Demostrar que $G \times H$ es un grupo y que es abeliano si y solo si G y H lo son.

7. Mostrar que si G y H son grupos finitos, el orden de un elemento $(g, h) \in G \times H$ es el mínimo común múltiplo entre los órdenes de g y h.

8. Determinar el orden $\mathrm{ord}(g)$ en los siguientes casos:

(I) $G = S_8$, $g = (1\,2)(5\,6\,7)$.

(II) $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$; $g = 2$, $g = 3$, $g = 4$ y $g = 10$.

(III) $G = S^1$, $g = \cos\frac{2\pi}{n} + i\ \mathrm{sen}\ \frac{2\pi}{n}$.

(IV) $G = D_4$, $g = r^2 s$.

9. Consideremos S_3 el grupo de permutaciones de $\{1,2,3\}$.

(I) Calcular el orden de todos los elementos de S_3.

(II) Sea $\sigma := (1\,3\,2)$ una permutación. Describir el subgrupo $C_\sigma = \{\tau \in S_3 : \tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau\}$.

(III) Hallar, si existe, un $\sigma \in S_3$ tal que el subgrupo C_σ tenga orden 1; tenga orden 2; tenga orden 3; tenga orden 6.

10. Sean G un grupo y $g \in G$ un elemento de orden finito. Calcular $\mathrm{ord}(g^n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

11. Sea p un número primo, $m \in \mathbb{N}$ y sea G un grupo de orden p^m. Probar que existe un elemento de orden p en G.

12. Mostrar que un grupo no trivial sin subgrupos propios es cíclico de orden primo.

13. Sea $(G,\cdot)$ un grupo.

(I) Sean $a, b \in G$. Probar que las siguientes aplicaciones de G en G son biyectivas y encontrar sus inversas

a) $x \mapsto a \cdot x$. *b)* $x \mapsto a \cdot x \cdot b$. *c)* $x \mapsto a \cdot x \cdot a^{-1}$.

(II) Determinar cuáles de las aplicaciones definidas en (I) son morfismo de grupos, en los casos G arbitrario y G abeliano.

14 (Argumento de Eckmann-Hilton)**.** Sea G un conjunto y $\star : G \times G \to G$, y $\otimes : G \times G \to G$ dos operaciones binarias con elementos neutros $1_\star$ y $1_\otimes$, respectivamente. Supongamos que las dos operaciones satisfacen, para todo $a, b, c, d \in G$, la siguiente *ley de intercambio*:

$$(a \star b) \otimes (c \star d) = (a \otimes c) \star (b \otimes d).$$

(I) Demostrar que los elementos neutros coinciden: $1_\star = 1_\otimes$.

(II) Demostrar que las operaciones coinciden: $a \star b = a \otimes b$, para todo $a, b \in G$.

(III) Demostrar que las operaciones son asociativas y conmutativas.

(IV) Concluir que se tienen estructuras de monoide conmutativo coincidentes: $(G,\star) = (G,\otimes)$

15. Sea $(G,\cdot)$ un grupo y consideremos la estructura de grupo de $G \times G$ definida en el Ejercicio 6. Demostrar que un grupo $(G,\cdot)$ es abeliano si y solo si su multiplicación $\cdot : G \times G \to G$ es morfismo de grupos.

Sugerencia: Utilizar el argumento de Eckmann-Hilton.

16. Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos. Probar que si $\mathrm{ord}(x)$ es finito, entonces $\mathrm{ord}(f(x))$ divide a $\mathrm{ord}(x)$.

17. Probar que $\mathbb{Z} = \langle m, n \rangle$ si y solo si m y n son coprimos.

18. Sea $f : G \to H$ un epimorfismo. Decidir para cuáles propiedades P_i vale la afirmación:

Si G satisface P_i entonces H satisface P_i.

(I) P_1: $|G| = n$.

(II) P_2: $|G| < \infty$.

(III) P_3: G es abeliano.

(IV) P_4: G no es abeliano.

(V) P_5: G es cíclico.

(VI) P_6: G es *finitamente* generado.

(VII) P_7: todo elemento tiene orden finito.

(VIII) P_8: todo elemento tiene orden infinito.

Si ahora $f : G \to H$ es un monomorfismo, decidir para cuáles propiedades vale la afirmación:

Si H satisface P_i entonces G satisface P_i.

19. Sea G un grupo y X un conjunto. Consideremos el grupo G^X de funciones de X en G con la multiplicación lugar a lugar:

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

(I) Demostrar que para todo $x_0 \in X$

$$\begin{aligned} ev_{x_0} : G^X &\to G \\ f &\mapsto f(x_0) \end{aligned}$$

es un morfismo de grupos. Describir su núcleo e imagen.

(II) Mostrar que si A es un grupo abeliano, entonces $\operatorname{Hom}(G, A)$ es un subgrupo de A^G.

20. Sea G un grupo.

(I) Mostrar que la función $ev_1 : \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G) \to G$ es una biyección y que si G es abeliano entonces es un isomorfismo de grupos.

(II) Describir $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(III) Probar que hay un isomorfismo de grupos $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(n : m)\mathbb{Z}$.

21. Demostrar que

(I) $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$.

(II) No existe un epimorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(III) $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(IV) $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathcal{U}_n$.

22. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) G es abeliano

(II) La aplicación $f : G \to G$ definida por $f(x) = x^{-1}$ es un morfismo de grupos.

(III) La aplicación $f : G \to G$ definida por $f(x) = x^2$ es un morfismo de grupos.

23. Hallar dos grupos G y H no isomorfos tales que $\operatorname{Aut}(G) \simeq \operatorname{Aut}(H)$.

24. Probar que todo grupo de orden a lo sumo 5 es abeliano. ¿Qué pasa para orden 6?