ÁLGEBRA II
PRIMER CUATRIMESTRE 2025
SOLUCIONES DEL SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

Ejercicio 1. Sea A un anillo conmutativo. Un A -módulo M se dice *simple* si tiene exactamente dos submódulos, y *semisimple* si todo submódulo $S \leq M$ admite un complemento, es decir, un submódulo T de M tal que $M = S \oplus T$.

- (I) Pruebe que un submódulo de un módulo semisimple es semisimple.
- (II) Pruebe que si M es un módulo semisimple, entonces $S \leq M$ es simple si y sólo si admite un complemento que es maximal.
- (III) Pruebe que si M es un módulo semisimple no nulo, entonces existe un submódulo simple $S \leq M$.

Solución. Hacemos cada inciso por separado.

(I) Consideremos M un módulo semisimple, $N \leq M$ y veamos que es semisimple. Dado $S \leq N$, por hipótesis existe $T \leq M$ tal que $S \oplus T = M$. Afirmamos que $S \oplus (T \cap N) = N$. Ambos submódulos están contenidos en N por definición, y $S \cap (T \cap N) = (S \cap T) \cap N = 0 \cap N = 0$, así que resta ver que todo elemento de N es una suma de elementos en cada factor. Sea $n \in N \leq M$. Como $M = S \oplus T$, existen $s \in S, t \in T$ tales que $n = s + t$. Como $t = n - s$ y $s \in S \leq N$, se sigue que $t \in S \cap N$. Esto concluye la prueba.

(II) Sean M un módulo semisimple, $S \leq M$ y $T \leq M$ tal que $S \oplus T = M$. Luego

$$M/T = \frac{S \oplus T}{0 \oplus T} \cong S.$$

El teorema de correspondencia de submódulos nos dice entonces que los submódulos de S se corresponden con submódulos de M/T , es decir, con submódulos de M que contienen a T . Que S sea simple significa entonces que haya exactamente dos de estos últimos submódulos, y esto es precisamente que T sea maximal.

(III) Sea M semisimple. Por el ítem (I), todo submódulo de M es también semisimple. A su vez, tomando complementos, (II) nos dice que un módulo semisimple admite submódulos simples si y sólo si admite submódulos maximales. Luego, es suficiente exhibir un submódulo de N de M que tenga a su vez un submódulo maximal¹. Como $M \neq 0$, existe un elemento no nulo $x \in M$. El submódulo cíclico $\langle x \rangle \leq M$ es isomorfo a A/I para algún ideal $I \subset A$. En particular, admite submódulos maximales ya que en el anillo A existen ideales maximales que contienen a I .

□

Ejercicio 2. Sean A un anillo conmutativo y P un A -módulo proyectivo. Pruebe que si existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A^k \xrightarrow{f} A^m \xrightarrow{g} A^n \xrightarrow{h} P \rightarrow 0,$$

entonces existen $r, s \in \mathbb{N}_0$ tales que $P \oplus A^r \cong A^s$.

¹Vimos en clase que esto es cierto para módulos finitamente generados. No era necesario usarlo —ni recordarlo. A continuación lo hacemos para un módulo cíclico.

Solución. La sucesión exacta del enunciado determina a su vez dos sucesiones exactas cortas. En primer lugar, podemos considerar

$$0 \rightarrow \ker(h) \hookrightarrow A^n \xrightarrow{h} P \rightarrow 0,$$

mientras que correstruyendo g obtenemos

$$0 \rightarrow A^k \xrightarrow{f} A^m \xrightarrow{g} \operatorname{im}(g) \rightarrow 0.$$

La primera sucesión se parte, pues P es proyectivo, así que $\ker(h) \oplus P \cong A^n$. Por exactitud $\operatorname{im}(g) = \ker(h)$, así que esto muestra que $P \oplus \operatorname{im}(g) \cong A^n$. En particular $\operatorname{im}(g)$ es proyectivo, al ser sumando de un módulo libre. Luego la segunda sucesión exacta corta se parte, e $\operatorname{im}(g) \oplus A^k \cong A^m$. En consecuencia

$$P \oplus A^m \cong P \oplus \operatorname{im}(g) \oplus A^k \cong A^n \oplus A^k \cong A^{n+k}.$$

como queríamos ver. □

Ejercicio 3. Sea M un $\mathbb{Z}$ -módulo.

(I) Pruebe que la relación en $M \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ dada por

$$(m, s) \sim (n, t) \iff tm = sn$$

es de equivalencia. Notamos $\frac{m}{s}$ a la clase de equivalencia de (m, s) .

(II) Pruebe que $N := M \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \sim$, el conjunto de clases de equivalencia de $\sim$, tiene una estructura de $\mathbb{Z}$ -módulo dada por

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} := \frac{tm + sn}{st}.$$

(III) Pruebe que hay un isomorfismo de $\mathbb{Z}$ -módulos $N \cong \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$.

Solución. Hacemos cada inciso por separado.

(i) Verificamos las tres propiedades de una relación de equivalencia.

- **reflexividad:** Dado un par (m, s) , tomando $k = 1$ tenemos que $1 \cdot s \cdot m = sm = 1 \cdot s \cdot m$, por lo que $(m, s) \sim (m, s)$. Luego $\sim$ es reflexiva.
- **simetría:** La simetría se sigue similarmente: dados dos pares $(m, s), (m', s')$, si $(m, s) \sim (m', s')$ entonces existe $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $ksm' = ksm'$, lo cual por la simetría de $=$ equivale a decir que $ksm' = ksm'$; en particular $(m', s) \sim (m, s)$.
- **transitividad:** supongamos que tenemos tres pares $(m, s), (n, t)$ y (m', s') tales que $(m, s) \sim (n, t)$ y $(n, t) \sim (m', s')$. Existen entonces $k, \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tales que

$$ktm = ksn, \quad \ell s'n = \ell tm'.$$

Si consideramos $a = ktl$, entonces

$$as'm = (ktl)s'm = \ell s'(ktm) = \ell s'(ksn) = ks(\ell s'n) = ks(\ell tm') = (ktl)sm' = asm'.$$

Luego $(m, s) \sim (m', s')$.

Antes de seguir hacemos la siguiente observación: si d es un entero no nulo, entonces $\frac{m}{s} = \frac{dm}{ds}$ pues se tiene la igualdad $dsm = sdm$.

- (II) Veamos en primer lugar que la función suma está bien definida. Si $(m, s) \sim (m', s')$, $(n, t) \sim (n', t')$, existen enteros no nulos k, ℓ tales que

$$ks'm = ksm', \quad \ell t'n = \ell tn'.$$

Veamos que $(tm + sn, st)$ y $(t'm' + s'n', s't')$ son equivalentes. En efecto

$$\begin{aligned} \frac{tm + sn}{st} &= \frac{kls't'(tm + sn)}{kls't'st} = \frac{\ell tt'(ks'm) + kss'(\ell t'n)}{kls't'st} = \frac{\ell tt'(ksm') + kss'(\ell tn')}{kls't'st} \\ &= \frac{k\ell st(t'm' + s'n')}{k\ell st s't'} = \frac{t'm' + s'n'}{s't'}. \end{aligned}$$

Una vez probada la buena definición se siguen todas las propiedades:

- **asociatividad:** para todo $\frac{m}{s}, \frac{n}{t}, \frac{x}{u} \in N$,

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} + \left(\frac{n}{t} + \frac{x}{u}\right) &= \frac{m}{s} + \frac{un + tx}{tu} \\ &= \frac{tum + sun + stx}{stu} = \frac{u(tm + sn) + stx}{stu} \\ &= \frac{tm + sn}{st} + \frac{x}{u} \\ &= \left(\frac{m}{s} + \frac{n}{t}\right) + \frac{x}{u}. \end{aligned}$$

- **conmutatividad:** como M es un grupo abeliano y $\mathbb{Z}$ un anillo conmutativo,

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{tm + sn}{st} = \frac{sn + tm}{ts} = \frac{n}{t} + \frac{m}{s} \quad (\forall \frac{m}{s}, \frac{n}{t} \in N).$$

Habiendo probado la conmutatividad, probamos la existencia de neutro e inversos sólo a un lado:

- **neutro:** definiendo $0 := \frac{0_M}{1}$,

$$\frac{m}{s} + 0 = \frac{1m + s0}{1s} = \frac{m}{s}$$

para todo $\frac{m}{s} \in N$.

- **inversos:** dado $\frac{m}{s} \in N$

$$\frac{m}{s} + \frac{-m}{s} = \frac{-sm + sm}{s^2} = \frac{0}{s^2} = \frac{0}{1} = 0.$$

- (III) Construiremos inversas mutuas $N \longleftrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N$. Primero definimos

$$\psi: N \rightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N, \quad \psi\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{1}{s} \otimes m.$$

Para esto, observemos que tal definición no depende del representante elegido para la clase de equivalencia $\frac{m}{s}$, pues si $\frac{n}{t} = \frac{m}{s}$, entonces existe $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $kst = ktm$ y

$$\frac{1}{t} \otimes n = \frac{ks}{tks} \otimes n = \frac{1}{tks} \otimes ksn = \frac{1}{tks} \otimes ktm = \frac{kt}{tks} \otimes m = \frac{1}{s} \otimes m.$$

La función ψ es lineal, pues

$$\psi\left(\frac{m}{s} + \frac{n}{t}\right) = \psi\left(\frac{tm + sn}{st}\right) = \frac{1}{st} \otimes tm + sn = \frac{1}{st} \otimes tm + \frac{1}{st} \otimes sn = \frac{1}{s} \otimes m + \frac{1}{t} \otimes n = \psi\left(\frac{m}{s}\right) + \psi\left(\frac{n}{t}\right).$$

En la otra dirección, para producir un morfismo $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \rightarrow N$ consideramos la función $b: \mathbb{Q} \times M \rightarrow N$, $b(r/s, m) = rm/s$. Un cálculo similar a los anteriores muestra que es bilineal:

$$b(r/s + r'/s', m) = b((s'r + sr')/ss'm) = \frac{s'rm + sr'm}{ss'} = \frac{rm}{s} + \frac{r'm}{s'} = b(r/s, m) + b(r'/s', m),$$

$$b(r/s, m + m') = \frac{r(m + m')}{s} = \frac{rm + rm'}{s} = \frac{rsm + srm'}{s^2} = \frac{rm}{s} + \frac{rm'}{s} = b(r/s, m) + b(r/s, m').$$

Se tiene entonces un morfismo

$$\phi: \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \rightarrow N, \quad \frac{r}{s} \otimes m \mapsto \frac{rm}{s}.$$

Por definición

$$\phi\psi\left(\frac{m}{s}\right) = \phi\left(\frac{1}{s} \otimes m\right) = \frac{1m}{s} = \frac{m}{s},$$

y $\psi\phi$ también resulta la identidad pues coincide con esta última en generadores:

$$\psi\phi\left(\frac{r}{s} \otimes m\right) = \psi\left(\frac{rm}{s}\right) = \frac{1}{s} \otimes rm = \frac{r}{s} \otimes m.$$

□

Ejercicio 4. Sean M un grupo abeliano finito, $p \in \mathbb{N}$ primo y $G_{p^\infty} := \bigcup_{n \geq 1} G_{p^n} \leq \mathbb{C}^\times$. Pruebe que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, G_{p^\infty})$ es isomorfo como grupo abeliano a

$$M[p] = \{m \in M : \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } p^n \cdot m = 0\},$$

la componente p -primaria de M .

Demostración. Como M es un grupo abeliano finito, es suma directa de sus componentes q -primarias para cada primo q . A su vez $M[q]$ es una suma directa de grupos abelianos de la forma $\mathbb{Z}/q^i\mathbb{Z}$. Recordemos que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(U \oplus T, N) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(U, N) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, N)$ para toda terna de grupos abelianos U, T, N y por lo tanto, como M se escribe como una suma directa finita, se tiene que

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, G_{p^\infty}) \cong \bigoplus_{q \text{ primo}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M[q], G_{p^\infty}).$$

Dado un primo $q \neq p$, los elementos de $M[q]$ tienen orden una potencia de q . Los elementos de G_{p^∞} , por otro lado, tienen orden una potencia de p , que será siempre coprima con una potencia de q . Luego $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M[q], G_{p^\infty}) = 0$ si $q \neq p$ y por lo tanto $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, G_{p^\infty}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M[p], G_{p^\infty})$. Escribiendo $M[p] \cong \mathbb{Z}/p^{a_1}\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/p^{a_n}\mathbb{Z}$, queremos ver entonces que

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, G_{p^\infty}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M[p], G_{p^\infty}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}/p^{a_i}\mathbb{Z}, G_{p^\infty}\right)$$

es isomorfo a $\mathbb{Z}/p^{a_1}\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/p^{a_n}\mathbb{Z}$. Es suficiente entonces probar que

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, G_{p^\infty}) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \cong G_{p^n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Ya sabemos en general que el grupo abeliano de la izquierda es isomorfo, como grupo abeliano, a los elementos de G_{p^∞} que tienen orden a lo sumo p^n . Estos son exactamente los números complejos $z \in G_{p^\infty}$ que satisfacen $z^{p^n} = 1$, es decir, el subgrupo G_{p^n} . □