ACCIONES DE GRUPOS
CLASE PRÁCTICA ÁLGEBRA II - 08/04/2025

VALENTÍN NICO

RESUMEN. La idea de la clase de hoy es introducir la noción de acciones de grupo, estudiar ciertos ejemplos y relacionarlos con la teoría de grupos que hemos desarrollado hasta el momento.

1. EL ABC DE LAS ACCIONES

Recordemos que en clases previas vimos el teorema de Cayley que nos dice que todo grupo G es isomorfo a un subgrupo de las permutaciones de G, vía un monomorfismo

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{i} S(G) \\ g &\mapsto g \cdot (-). \end{aligned}$$

Esto trae consigo una moraleja: todos los grupos *son* (un subconjunto de) permutaciones. Una pregunta que podemos hacernos es si será cierto que G es subgrupo de algún otro $S(X)$, para algún X. Sin embargo, previo a esto debemos preguntarnos si es que existe algún morfismo de G en las permutaciones de X, para algún X.

Definición 1. Una **acción de grupos** $G \curvearrowright X$ es un morfismo de grupos $\theta : G \to S(X)$.

Veamos ejemplos:

Ejemplo 2. Convencerse de que las siguientes son acciones de grupos y calcular su núcleo:

(I) $G \curvearrowright G$, vía $G \xrightarrow{i} S(G)$ definida anteriormente.
(II) $S(X) \curvearrowright X$, vía $S(X) \xrightarrow{\mathrm{Id}} S(X)$.
(III) $G \curvearrowright X$, vía $G \xrightarrow{1} S(X)$, el morfismo trivial.
(IV) $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, vía $\mathbb{Z} \xrightarrow{\theta} S(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ donde $\theta(k)$ es sumar k módulo n.

Como vemos, los últimos dos ejemplos de acciones tienen núcleo no trivial y por ende no necesariamente G *es subgrupo* del conjunto de permutaciones de X.

Definición 3. Decimos que una acción es **fiel** si es un monomorfismo.

¿Cuánto falla G en ser subgrupo de las permutaciones?

Proposición 4. Si $\theta : G \to S(X)$ es una acción $G \curvearrowright X$, entonces $G/\ker(\theta)$ actúa fielmente en X. Recíprocamente, si $H \lhd G$ y G/H actúa fielmente en X, entonces existe una acción $\theta_H : G \to S(X)$ con núcleo exactamente H.

Demostración. Sea $H \lhd G$ cualquier subgrupo normal de G, como por ejemplo lo es $\ker(\theta)$. Por propiedad universal del cociente tenemos una correspondencia

$$\{\theta : G \to S(X) \,|\, H \subseteq \ker(\theta)\} \longleftrightarrow \{\overline{\theta} : G/H \to S(X)\}.$$

Esta correspondencia manda morfismos con núcleo exactamente H en monomorfismos, con lo cual obtenemos la siguiente biyección:

$$\{\theta : G \to S(X) \mid H = \ker(\theta)\} \longleftrightarrow \{\overline{\theta} : G/H \to S(X) \mid \overline{\theta} \text{ es un monomorfismo}\}.$$

En particular, esto demuestra que hay una correspondencia entre acciones que tienen núcleo exactamente H y acciones fieles en G/H. ■

Ejercicio 5. Determinar cuántas acciones fieles hay de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en un conjunto de 3 elementos para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Como todos los conjuntos de 3 elementos están en biyección, una acción de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en un conjunto de 3 elementos queda determinada por un morfismo $\theta : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to S_3$ y por lo tanto basta estudiar los *monomorfismos* de grupos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en S_3. Por la Proposición anterior, estos se corresponden con morfismos de $\mathbb{Z}$ en S_3 con núcleo exactamente $n\mathbb{Z}$. Como un morfismo que sale de $\mathbb{Z}$ queda determinado por su imagen del 1, basta ver qué morfismos mandan el 1 a un elemento de orden n en S_3, para cada $n \in \mathbb{N}$. Es decir, basta contar los elementos de cada orden en S_3. Como $S_3 \cong D_3$, basta contar los elementos de cada orden en D_3 y esto ¡es algo que ya hicimos! En consecuencia, tenemos que:

- para $n = 1$ hay una acción fiel,
- para $n = 2$ hay tres acciones fieles,
- para $n = 3$ hay dos acciones fieles.

■

Parecería que encontrar acciones explícitamente no es una tarea tan sencilla. Sin embargo, la siguiente observación es clave:

Observación 6. Una acción de grupos $G \curvearrowright X$ induce una operación $\bullet : G \times X \to X$, dada por

$$g \bullet x = \theta(g)(x),$$

que satisface para todo $g, h \in G$ y $x \in X$

(I) el elemento neutro actúa trivialmente: $1 \bullet x = x$,
(II) es compatible con la multiplicación del grupo: $g \bullet (h \bullet x) = (g \cdot h) \bullet x$.

Esta re-interpretación de las acciones de grupo es una versión *intrínseca* al conjunto X; mientras que la anterior es una versión global.

Ejemplo 7. Demostrar que el grupo $\mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ vía

$$n \bullet (x, t) = (x + n, (-1)^n t).$$

Mostrar que esta acción corresponde con una acción $\theta : \mathbb{Z} \to S(\mathbb{R} \times [-1, 1])$ vía $\theta(n) = n \bullet (-)$. Demostrar que esta acción es fiel.

Resulta que todas las acciones son exactamente de esta forma:

Ejercicio 8 (para el hogar)**.** Dar una acción de grupos $\theta : G \to S(X)$ *es lo mismo* que dar una operación $\bullet : G \times X \to X$ en donde el elemento neutro actúa trivialmente y es compatible con la multiplicación del grupo, en el sentido de la Observación 6.

En la versión de acciones como morfismos, la idea era estudiar para cada $g \in G$ una permutación. Con la versión intrínseca tiene sentido preguntarnos qué pasa para cada x si *multiplicamos* por todos los $g \in G$ posibles.

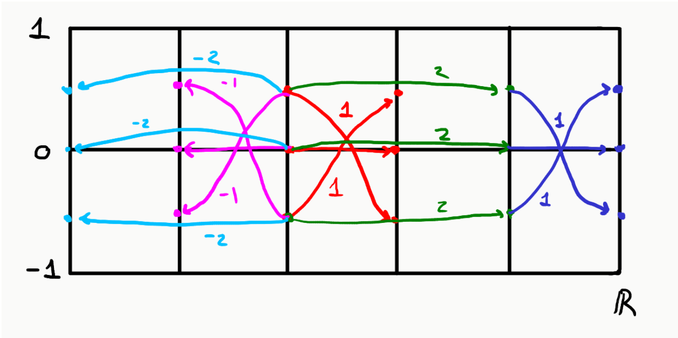

FIGURA 1. Representación gráfica de la acción $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \times [-1,1]$.

Definición 9. Si $G \curvearrowright X$ y $x \in X$, la **órbita** $G \bullet x$ de x viene dada por

$$G \bullet x = \{g \bullet x : g \in G\}.$$

La acción de G se dice **transitiva** si existe $x \in X$ tal que $G \bullet x = X$.

Se puede probar que las órbitas forman una partición de X. En otras palabras, tenemos una relación de equivalencia:

$$x \sim y \iff G \bullet x = G \bullet y.$$

y llamando X/G al conjunto de clases de equivalencia por esa relación, entonces se tiene que

$$X = \bigsqcup_{[x] \in X/G} G \bullet x.$$

Veamos qué pasa si vemos al conjunto $\mathbb{R} \times [-1,1]$ *a menos* de la relación de equivalencia inducida por la acción. Es decir, qué pasa si identificamos a todo par de elementos que estén en una misma órbita:

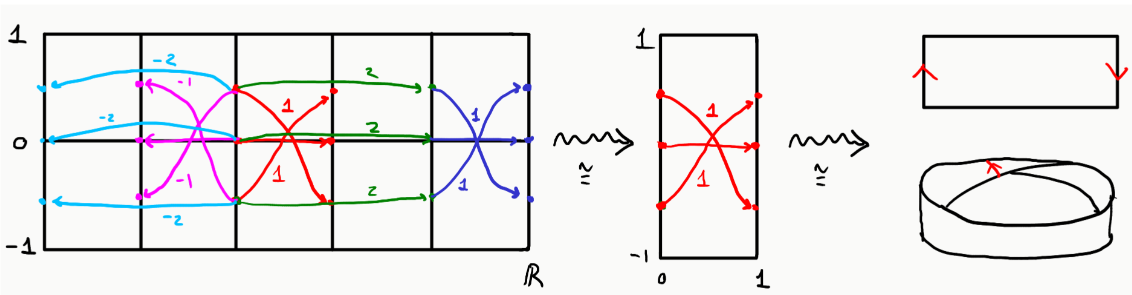

FIGURA 2. Representación gráfica de las órbitas de la acción $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \times [-1,1]$.

Ejercicio 10 (para el hogar)**.** Definir una relación de equivalencia $\sim$ en $[0,1] \times [-1,1]$ cuyas clases de equivalencia representen a la banda de Möbius y demostrar que hay una biyección

$$\frac{[0,1] \times [-1,1]}{\sim} \cong \frac{\mathbb{R} \times [-1,1]}{\mathbb{Z}}.$$

Del ejemplo anterior, uno estaría tentado a decir que los elementos de las órbitas quedan determinados por un único elemento de G. Es decir, que la asignación

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{\theta_x} G \bullet x \\ g &\mapsto g \bullet x \end{aligned}$$

es inyectiva (y en particular biyectiva). Una acción de este tipo se llama **libre**. Es fácil verificar que esto se cumple en el ejemplo anterior. Sin embargo, esto no es cierto en general (¡pensar un ejemplo!), pese a que la función θ_x siempre es sobreyectiva. La falla en la inyectividad vendrá dada por elementos $g \neq h$ tales que $g \bullet x = h \bullet x$. Esto ocurre si y solo si

$$g^{-1}h \bullet x = x,$$

lo cual motiva la siguiente definición:

Definición 11. Dada $G \curvearrowright X$ una acción y $x \in X$, se define el subgrupo **estabilizador** de x como

$$E_G(x) = \{g \in G : g \bullet x = x\}.$$

Efectivamente el estabilizador captura la falla en la inyectividad de θ_x y, de manera análoga a lo que ocurre con el teorema de isomorfismos, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 12 (Órbita-estabilizador)**.** Si $G \curvearrowright X$ es una acción de G en X, entonces se tiene una biyección

$$\begin{aligned} G/E_G(x) &\xrightarrow{\cong} G \bullet x \\ g \cdot E_G(x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

Corolario 13. Sea G un grupo finito actuando en un conjunto X. Entonces,

$$|G| = |G \bullet x||E_G(x)|.$$

2. Puro acting

Proposición 14. Todo grupo G actúa *transitivamente* por multiplicación a izquierda en las coclases G/H sobre cualquier subgrupo $H \leq G$.

Demostración. Definamos una acción de G en el conjunto de coclases G/H, vía

$$g \bullet (x \cdot H) = (gx) \cdot H.$$

Está bien definida porque si $xH = yH$ entonces $(gx)\cdot H = (gy)\cdot H$ si y solo si $(gx)^{-1}(gy) \in H$, lo cual es cierto pues $x^{-1}y \in H$. Más aún, es acción de grupos pues

$$1 \bullet (xH) = xH$$

y

$$g \bullet (h \bullet (xH)) = g \bullet (hxH) = (ghx)H = (gh) \bullet (xH).$$

Para ver la transitividad, basta calcular la órbita de $1H \in G/H$ que coincide con

$$G \bullet (1H) = G/H.$$

■

La acción de G en sus coclases hace cuestionarnos: ¿ganaremos algún tipo de información por ver esa acción de nuevo en la versión morfismo?

Proposición 15. Sea $\theta : G \to S(G/H)$ la acción inducida por multiplicación en las coclases. Demostrar que $\ker(\theta) \subseteq H$ y que H es normal si y solo si $H = \ker(\theta)$. En particular, la acción no siempre es fiel.

Demostración. Dado cualquier $g \in \ker(\theta)$ se tiene que

$$g \bullet (xH) = (gx)H = xH$$

para todo $x \in G$. En particular, $gH = H$ y por lo tanto $g \in H$. Por lo tanto,

$$\ker(\theta) \subseteq H.$$

Es claro que H es normal si $\ker(\theta) = H$. Recíprocamente, supongamos que H es normal. En tal caso, dado $h \in H$ se tiene que

$$(h \bullet (xH) = xH,\ \forall x \in G) \text{ si y solo si } (x^{-1}hx \in H,\ \forall x \in G).$$

Esta última afirmación es equivalente a la normalidad de H en G. ∎

El resultado anterior muestra otro morfismo del cual un subgrupo normal es canónicamente su núcleo. Finalmente, también generaliza la normalidad de subgrupos de índice 2:

Ejercicio 16 (Ejercicio 9, práctica 3)**.** Sea G un grupo finito y $H \leq G$ un subgrupo cuyo índice es el menor primo que divide al orden de G. Demostrar que H es normal en G.

Comentario: La demostración del Corolario 13 usa el Teorema de Lagrange. Solo por ese motivo, una demostración del Teorema a partir de órbita-estabilizador, usando la acción de un grupo en sus coclases, es circular. Una explicación más detallada de lo que está ocurriendo junto a una demostración de Lagrange con acciones puede encontrarse en esta respuesta de Math.StackExchange.